

Aplicação da otimização topológica na redução de consumo **de material em estruturas de concreto armado**

GABRIEL NEVES QUEIROZ - MSc. - <https://orcid.org/0009-0005-9962-8934> (gabrielnvsqueiroz@usp.br) ;
EDSON DENNER LEONEL - Prof. Dr. - <https://orcid.org/0000-0002-7842-0334> – **EESC/USP**

RESUMO

A OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA BUSCA A MELHOR DISTRIBUIÇÃO DE MATERIAL EM UM DOMÍNIO DE PROJETO, REPRESENTANDO UMA FERRAMENTA COMPUTACIONAL PROMISSORA PARA A CONCEPÇÃO DE ESTRUTURAS MAIS LEVES E SUSTENTÁVEIS. NA CONSTRUÇÃO EM CONCRETO, SUA APLICAÇÃO TEM GRANDE RELEVÂNCIA, ESPECIALMENTE PARA A REDUÇÃO DA PEGADA DE CARBONO DESSE SETOR. NESTE TRABALHO, APLICA-SE A OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA PARA A GERAÇÃO DE MODELOS SIMPLIFICADOS DE BIELAS E TIRANTES PARA UM PILAR COM CONSOLO E UMA VIGA-PAREDE, COM VISTAS A AUXILIAR O DIMENSIONAMENTO POR PARTE DO PROJETISTA. OBSERVA-SE QUE OS MODELOS GERADOS SÃO FORTEMENTE INFLUENCIADOS PELA GEOMETRIA E PELAS CONDIÇÕES DE CARREGAMENTO, EXIGINDO ANÁLISE ESPECÍFICA PARA CADA PROJETO. ALÉM DISSO, DEMONSTRA-SE QUE A FERRAMENTA IMPLEMENTADA PERMITE A IDENTIFICAÇÃO DE REGIÕES MENOS DESFAVORÁVEIS PARA O POSICIONAMENTO DE ABERTURAS, CONTRIBUINDO PARA UM CONSUMO MAIS RACIONAL DE AÇO NO CONCRETO ARMADO.

PALAVRAS-CHAVE: OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA, MODELOS DE BIELAS E TIRANTES, SIMP, MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS, CONCRETO ARMADO.

1. INTRODUÇÃO

Diante das crescentes preocupações com a sustentabilidade na construção civil e seu papel no combate às mudanças climáticas, diversas pesquisas têm sido feitas para reduzir a pegada de carbono associada ao setor. Segundo o relatório da *United Nations Environment Programme* (UNEP), a construção e a operação de edifícios foram responsáveis por 34% das emissões de CO₂ em escala global em 2023, sendo

aproximadamente 8% provenientes da produção de materiais de construção civil (UNEP, 2025), o que reforça a necessidade de mudanças. Entre os principais contribuintes pelas emissões de gases de efeito estufa estão o concreto, cuja produção demanda grande quantidade de cimento, e o aço, materiais que constituem os elementos fundamentais das estruturas de concreto armado. Nesse contexto, alguns avanços têm sido feitos para mitigar os impactos ambientais, como o uso de concretos de baixo carbono, a utilização de agregados reciclados, a incorporação de materiais cimentícios suplementares e a aplicação de materiais de elevado desempenho estrutural, como o concreto de ultra alto desempenho (UHPC) e o concreto reforçado com fibras (FRC).

Além das possibilidades citadas, uma estratégia promissora é a adoção de técnicas de otimização estrutural, que busca reduzir o consumo de material sem comprometer a segurança. Com isso, há uma redução dos impactos ambientais e dos custos associados à produção de materiais, o que é de interesse para o setor produtivo. Dentre as abordagens de otimização estrutural, destaca-se a otimização topológica (OT), definida como a busca pela melhor distribuição de material no domínio de projeto, removendo material das regiões menos solicitadas. A OT pode ser aplicada no projeto de estruturas complexas, auxiliando o projetista no dimensionamento.

As técnicas de OT para domínios contínuos surgiram no final da década de 1980, com o método de homogeneização proposto por Bendsøe e Kikuchi (1988). Isso foi possível graças ao desenvolvimento dos computadores acoplado ao advento de

métodos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos (MEF). Em seguida, outras abordagens foram propostas, incluindo métodos de densidade, evolucionários e baseados na variação do contorno. Neste trabalho, utiliza-se o método *Solid Isotropic Material with Penalization* (SIMP), introduzido por Bendsøe (1989) e que distribui o material sobre o domínio de forma a obter a estrutura mais rígida possível.

Uma revisão abrangente sobre as aplicações da OT para sistemas construtivos em concreto pode ser encontrada em Stoiber e Kromoser (2021), que identificaram como principais áreas de aplicação a geração de modelos de bielas e tirantes e a modelagem multimaterial. No entanto, outras áreas também se destacam, como a consideração de múltiplos casos de carregamento, a imposição de restrições de tensão, além de abordagens envolvendo aspectos estéticos, protensão e impressão 3D de concreto. Os autores destacaram algumas particularidades da aplicação da OT a estruturas de concreto, exigindo cuidados especiais na modelagem devido ao seu comportamento mecânico complexo, com acentuada não linearidade material e assimetria entre as resistências à tração e à compressão.

Assim, este trabalho tem como objetivo exemplificar a aplicação da OT em projetos estruturais de concreto armado, visando auxiliar na geração de modelos de bielas e tirantes. Para isso, são estudados dois exemplos com o intuito de evidenciar a importância da adoção de um modelo específico em função da geometria e das condições de carregamento. Além disso, investiga-se a influência do posicionamento de aberturas em uma

viga-parede sobre a configuração do modelo de bielas e tirantes e o consumo estimado de armadura.

2. MODELOS DE BIELAS E TIRANTES

Os modelos de bielas e tirantes surgiram como uma generalização da analogia de treliça feita por Ritter e Mörsch, permitindo a idealização do mecanismo de transferência de forças em elementos de concreto fissurados. Nesses modelos, os tirantes são representados pela armadura tracionada e as bielas por elementos comprimidos de concreto. Em grande parte dos projetos de engenharia, as hipóteses de cálculo que baseiam os métodos tradicionais de dimensionamento são adequadas. Contudo, para as chamadas regiões D, marcadas por descontinuidades geométricas ou mecânicas, como consolos curtos, blocos de fundação e nós de pórtico, a hipótese de Euler-Bernoulli deixa de ser válida, havendo uma distribuição não linear de deformações na seção transversal. Neste caso, o uso de modelos de bielas e tirantes é justificado por normas técnicas, como a ABNT NBR 6118:2023 (ABNT, 2023), para simplificar o dimensionamento. Assim, para estruturas complexas, a otimização topológica constitui uma ferramenta útil para a geração automática de modelos de bielas e tirantes, evitando o processo de tentativa e erro devido à falta de experiência prévia do projetista. Isso é possível porque, para uma estrutura contínua em estado plano de tensão, a configuração ótima gerada pela OT tende a ser similar a uma treliça. Dessa forma, o resultado da OT fornece uma configuração aproximada das bielas e dos tirantes, cabendo ao projetista a definição final do modelo e o dimensionamento (Liang; Xie; Steven, 2000).

3. OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Apresentam-se brevemente alguns conceitos envolvidos na formulação do MEF, seguidos dos principais equacionamentos do método SIMP.

3.1 Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos é um método numérico amplamente utilizado para simulações estruturais, sendo incorporado em diversos softwares comerciais empregados por projetistas. Ele é baseado

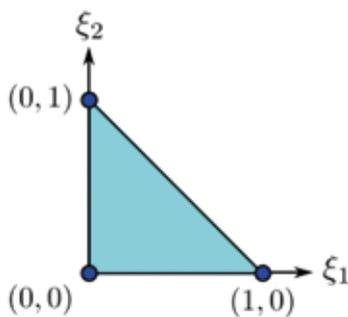


FIGURA 1

REPRESENTAÇÃO DE UM ELEMENTO FINITO T3 NO ESPAÇO DAS COORDENADAS ADIMENSIONAIS

FONTE: ELABORADO PELOS AUTORES

na subdivisão do domínio em elementos, transformando o problema originalmente contínuo em discreto. Assim, é possível obter soluções aproximadas por meio de um número finito de parâmetros nodais, como os deslocamentos, que constituem as incógnitas do problema.

Para domínios planos discretizados em elementos finitos triangulares, tem-se um sistema de coordenadas adimensionais (ξ_1, ξ_2) definido para cada elemento, com $\xi_i \in [0,1]$, sendo a direção dada por $i = 1,2$. A Figura 1 ilustra um elemento triangular de aproximação linear, contendo 3 nós (elemento T3), no espaço das coordenadas adimensionais.

Assim, os deslocamentos \vec{u} de um ponto qualquer podem ser interpolados a partir dos deslocamentos nodais \vec{U} do elemento finito, conforme a Equação 1 em notação indicial. Para isso, utilizam-se as funções de forma ϕ_i , com $i = 1,2,3$ indicando o nó do elemento sobre o qual a função é definida. A função de forma é unitária em seu nó de base e nula nos demais nós do elemento.

$$[1] \quad u_i(\xi_1, \xi_2) = \phi_i(\xi_1, \xi_2)U_i^l$$

A formulação do MEF pode ser diretamente deduzida a partir de teoremas de energia (Soriano, 2003). A energia interna reflete-se pela matriz de rigidez K , a qual, multiplicada pelos deslocamentos do corpo, deve ser igual ao vetor de forças externas \vec{F}^{ext} , como mostra a Equação 2.

$$[2] \quad K \cdot \vec{U} = \vec{F}^{ext}$$

3.2 Método SIMP

O método SIMP associa a cada elemento finito uma grandeza adimensional $\rho \in [0,1]$ denominada densidade, que indica se o elemento está vazio ou sólido. Essa grandeza, elevada a um parâmetro $p = 3$, realiza uma penalização da matriz constitutiva elástica original D^0 , resultando na matriz constitutiva efetiva D conforme a Equação 3.

$$[3] \quad D = \rho^p D^0$$

O problema de otimização é definido pela Equação 4, cuja função a ser minimizada é a flexibilidade c , dada pelo trabalho das forças externas, e as variáveis de projeto são as densidades dos elementos. Como restrições, tem-se o equilíbrio da estrutura, além de que o volume de material V_m não deve superar o volume final prescrito \vec{V}_f .

$$[4] \quad \begin{aligned} &\text{minimizar } c = \vec{F}^{ext} \cdot \vec{U} \\ &\text{sujeito a: } K \cdot \vec{U} = \vec{F}^{ext} \\ &V_m \leq \vec{V}_f \\ &0 \leq \rho \leq 1 \end{aligned}$$

A Equação 5 mostra o cálculo do gradiente da função objetivo em relação às densidades, sendo o índice sobrescrito el referente às grandezas do elemento analisado. Para atualizar as densidades, utiliza-se um critério de otimalidade com esquema de filtro apresentado por Sigmund (2001) a partir do gradiente calculado. Dessa forma, o método SIMP é capaz de redistribuir o material ao longo do domínio até que as mudanças nas densidades sejam suficientemente pequenas.

$$[5] \quad \frac{dc}{d\rho^{el}} = -p\rho^{p-1}\vec{U}^{el} \cdot K^{0,el} \cdot \vec{U}^{el}$$

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Apresentam-se dois exemplos de aplicação da OT a estruturas de concreto armado, sendo um pilar com consolo e uma viga-parede. As formulações foram implementadas em código computacional desenvolvido em linguagem FORTRAN, estando os códigos-fonte disponíveis aos interessados de forma gratuita sob demanda aos autores. Para ambos os casos, adotaram-se, para o concreto, módulo de elasticidade de 28,567 GPa e coeficiente de Poisson de 0,15.

4.1 Pilar com consolo

Tem-se, neste exemplo, um pilar de 2,7 m de altura contendo um consolo de 70 cm de altura e 60 cm de comprimento, com uma força vertical de 500 kN, conforme a Figura 2. Utilizou-se uma malha composta por 8850 elementos T3, considerando estado plano de tensão e espessura de 30 cm. Para o método SIMP, adotou-se um volume final igual a 40% do inicial.

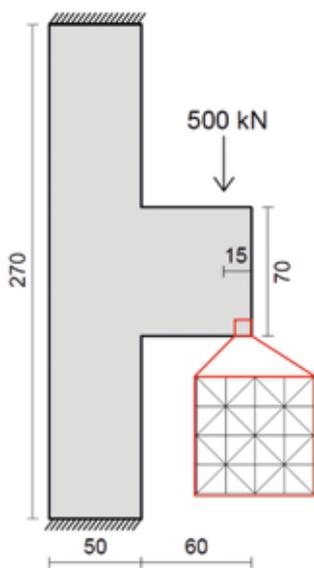


FIGURA 2
ESQUEMA DO PILAR COM CONSOLO E DETALHE DA MALHA UTILIZADA (DIMENSÕES EM CM)

FONTE: ELABORADO PELOS AUTORES

A Figura 3 mostra o resultado da OT, com as cores preto e cinza claro denotando presença e ausência de material, respectivamente. Observa-se que a configuração da estrutura é semelhante a um conjunto de barras de treliça. Para verificação de precisão, são

incluídos na Figura 3 os resultados obtidos por Bruggi (2009) usando o SIMP e por Almeida, Simonetti e Oliveira Neto (2013) usando um método evolucionário suavizado denominado SESO, havendo boa correspondência entre as soluções.

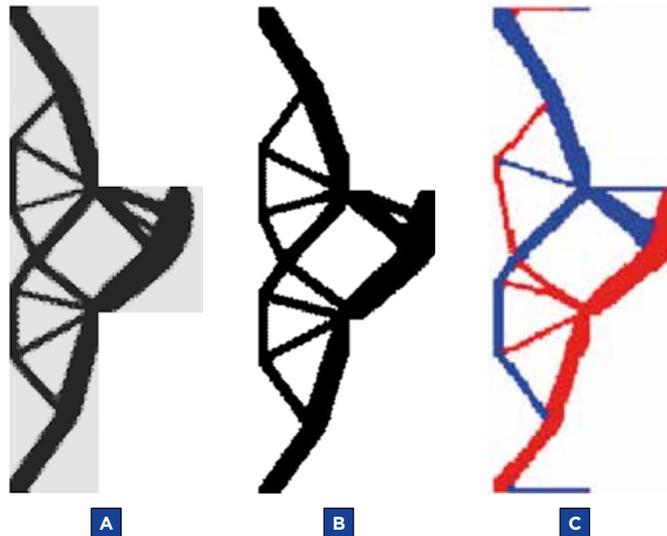


FIGURA 3
COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS OBTIDOS PELOS AUTORES (A) E POR TRABALHOS DA LITERATURA USANDO OS MÉTODOS SIMP (B) E SESO (C)

FONTE: ELABORADO PELOS AUTORES (A), BRUGGI (2009) (B) E ALMEIDA, SIMONETTI E OLIVEIRA NETO (2013) (C)

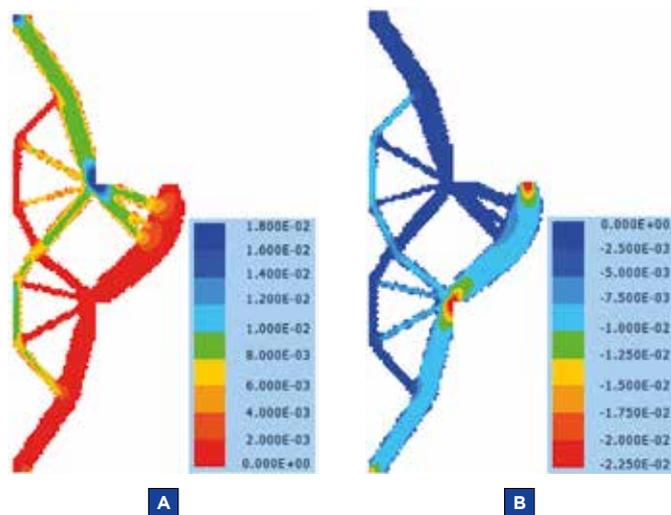


FIGURA 4
TENSÕES PRINCIPAIS DE TRAÇÃO (A) E DE COMPRESSÃO (B) PARA A ESTRUTURA RESULTANTE (VALORES EM GPA)

FONTE: ELABORADO PELOS AUTORES

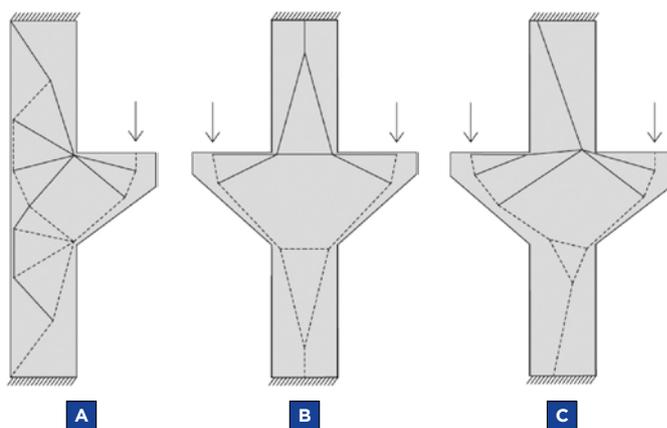


FIGURA 5
MODELOS SIMPLIFICADOS DE BIELAS E TIRANTES PARA O PILAR COM UM (A) E DOIS CONSOLOS, PARA FORÇAS SIMÉTRICAS (B) E ASSIMÉTRICAS (C). AS LINHAS CONTÍNUAS REPRESENTAM OS TIRANTES, E AS TRACEJADAS, AS BIELAS

FONTE: ELABORADO PELOS AUTORES

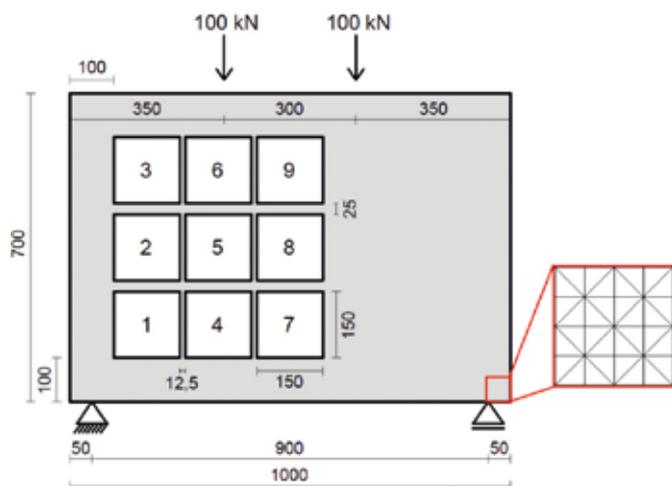


FIGURA 6

ESQUEMA DA VIGA-PAREDE COM NOVE POSSIBILIDADES DE ABERTURA E DETALHE DA MALHA UTILIZADA (DIMENSÕES EM CM)

FONTE: ELABORADO PELOS AUTORES

e tirantes mostrado na Figura 5(a). Destaca-se que esse modelo pode auxiliar o projetista na definição de um modelo final, mas deve ser adaptado para o dimensionamento. Por exemplo, observa-se que as barras não formam uma treliça isostática e sua disposição dificulta o posicionamento da armadura do ponto de vista prático. Além disso, é necessário verificar as tensões nas bielas e nos nós, bem como o comprimento de ancoragem da armadura.

Para verificar a influência da geometria e do carregamento sobre o modelo gerado, a análise topológica foi efetuada para um pilar com dois consolos, considerando carregamento simétrico e assimétrico. Para a segunda situação, a força aplicada no consolo esquerdo foi de 250 kN. Os resultados são mostrados na Figura 5(b-c), evidenciando a dependência da solução em relação às condições do problema. Logo, os modelos de bielas e tirantes devem ser estudados especificamente para cada situação de projeto.

Cabe destacar que nos modelos da Figura 5 removeu-se material da região menos solicitada dos consolos. Seria possível remover mais material do interior da estrutura, porém isso é dificultado por questões construtivas e pelo

comportamento não linear do concreto. Entretanto, para situações específicas de carregamento e usando concretos de alto desempenho, a fabricação de uma estrutura topologicamente otimizada é viabilizada por técnicas de manufatura aditiva. Portanto, a OT apresenta potencial para a concepção de elementos de geometria complexa em concreto com reduzido consumo de material.

arbitraram-se nove opções de aberturas quadradas com 1,5 m de lado. As malhas usadas são compostas por 8672 elementos T3, considerando estado plano de tensão e espessura de 20 cm. Para o método SIMP, adotou-se um volume final igual a 30% do inicial. Este exemplo é inspirado em painéis de fachada, largamente utilizados pela indústria de concreto pré-fabricado. Destaca-se que a industrialização da construção civil é outra estratégia para reduzir a pegada de carbono desse setor.

Os resultados da OT são apresentados na Figura 7, na qual as cores vermelho e azul denotam presença e ausência de material, respectivamente. Para as aberturas nas posições 4, 7, 8 e 9, não houve alteração em relação à estrutura maciça, sendo por isso omitidos os resultados. Observa-se que a presença das aberturas na direção do fluxo das tensões principais gerou uma modificação significativa na configuração das barras, principalmente para as posições 1, 2 e 6. Essas modificações são caracterizadas pelo aparecimento de tirantes transversais às bielas no entorno da abertura. Para as aberturas nas posições 3 e 5, o resultado é similar à estrutura maciça. Contudo, a presença da abertura gerou um estreitamento da

4.2 Viga-parede com abertura

Considera-se uma viga-parede de 10 m de comprimento e 7 m de altura submetida a duas forças concentradas de 100 kN na borda superior, conforme a Figura 6. Para verificar o efeito de diferentes posicionamentos de aberturas,

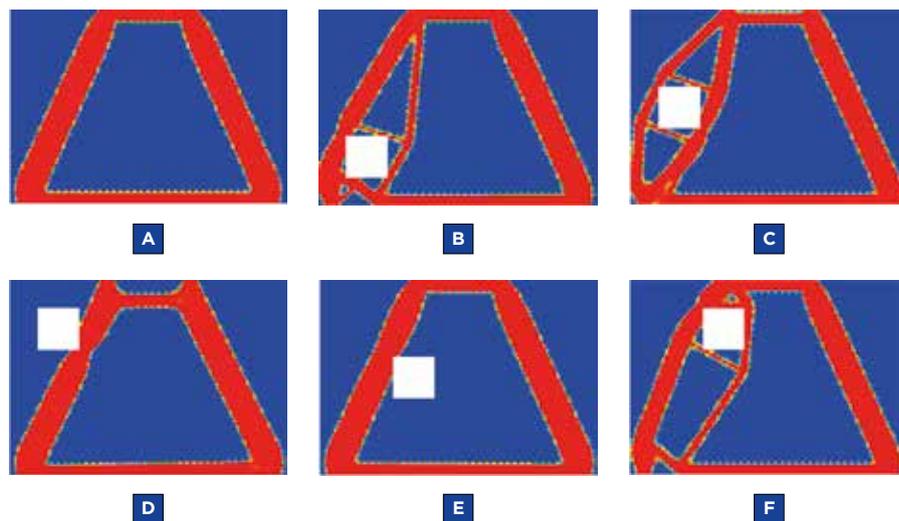


FIGURA 7

CONFIGURAÇÃO FINAL DA ESTRUTURA PARA OS CASOS SEM ABERTURA (A) E COM ABERTURA NAS POSIÇÕES 1 (B), 2 (C), 3 (D), 5 (E) E 6 (F)

FONTE: ELABORADO PELOS AUTORES

biela diagonal, levando a uma concentração de tensões que deve ser avaliada na etapa de verificação, possivelmente exigindo reforço.

A partir das soluções da Figura 7, construíram-se os modelos de bielas e tirantes apresentados na Figura 8. Mesmo com as simplificações dos modelos, fez-se uma estimativa da área de aço necessária para cada tirante, a partir da força de tração nas barras. Essa força, mostrada na Figura 8, foi calculada multiplicando o valor médio das tensões

principais de tração pela área da seção transversal obtida da OT. Assim, adotando aço CA-50, com valor de cálculo da tensão de escoamento (f_{yd}) igual a 43,5 kN/cm², foram calculadas as áreas necessárias para cada barra por meio da Equação 6, na qual A_s é a área de aço e F_{sd} é a força solicitante de cálculo.

$$[6] \quad A_s = \frac{F_{sd}}{f_{yd}}$$

A Tabela 1 apresenta a comparação

do volume total de aço para cada configuração, bem como a diferença relativa percentual em relação à viga maciça. Os maiores volumes correspondem às configurações 2 e 6, com aumento de consumo da ordem de 25%, indicando posições mais desfavoráveis para a localização de aberturas nesse modelo. Já as posições 1 e 3 levaram a aumentos de cerca de 11% e 15%, respectivamente. Dessa forma, com base nos resultados apresentados neste exemplo, a paginação de painéis de fachada pode ser alterada de forma inteligente em função do posicionamento de aberturas, como portas e janelas, para promover a redução do consumo de aço.

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho, foram apresentados dois exemplos de aplicação da otimização topológica à determinação de modelos de bielas e tirantes em estruturas de concreto armado. Utilizou-se o método SIMP juntamente com análise por meio do MEF, o que se mostrou eficaz na geração de modelos simplificados para auxiliar o dimensionamento.

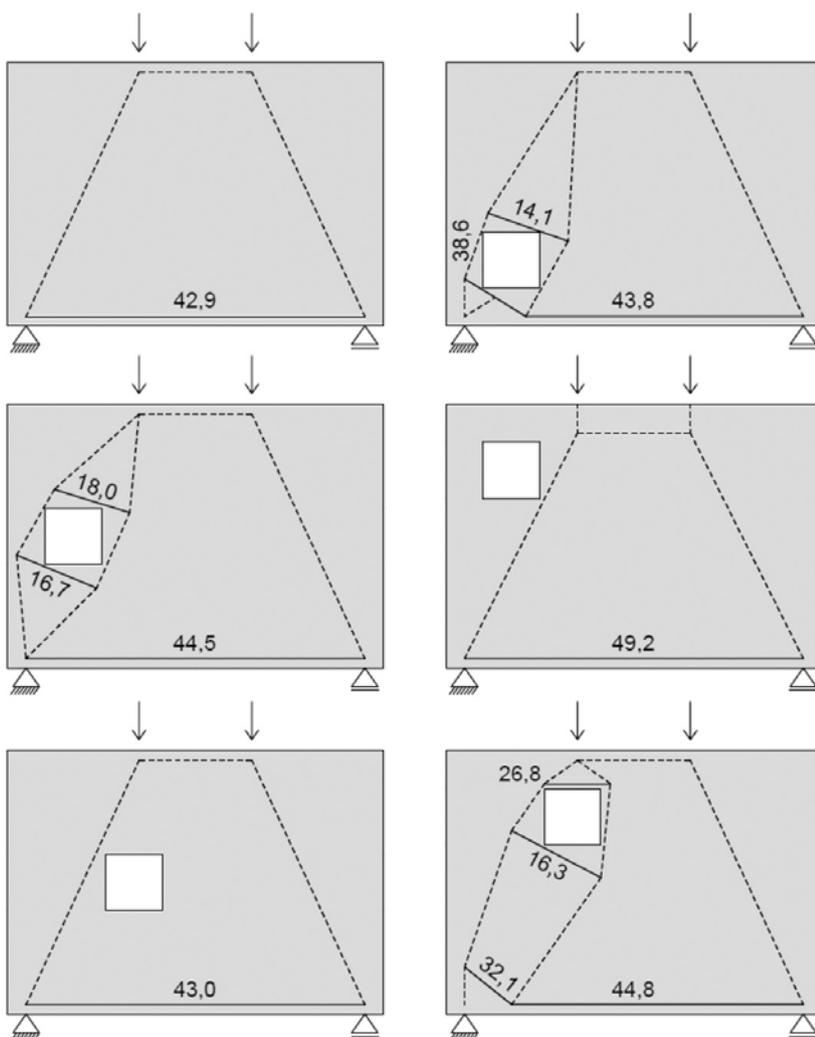


FIGURA 8

MODELOS SIMPLIFICADOS DE BIELAS E TIRANTES, COM OS VALORES DAS FORÇAS NOS TIRANTES EM kN. AS LINHAS CONTÍNUAS REPRESENTAM OS TIRANTES, E AS TRACEJADAS, AS BIELAS

FONTE: ELABORADO PELOS AUTORES

TABELA 1

VOLUME DE AÇO NECESSÁRIO PARA A VIGA-PAREDE COM ABERTURAS EM DIFERENTES POSIÇÕES E COMPARAÇÃO PERCENTUAL COM A ESTRUTURA MACIÇA

Posição	Volume de aço (cm ³)	Diferença relativa percentual (%)
Sem abertura	888	0,0
1	986	11,0
2	1097	23,5
3	1019	14,7
4	888	0,0
5	891	0,3
6	1126	26,8
7	888	0,0
8	888	0,0
9	888	0,0

FONTE: ELABORADO PELOS AUTORES

Os resultados demonstram a dependência dos modelos em relação às condições geométricas e de carregamento, evidenciando a necessidade de estudar um modelo particular para cada projeto. No exemplo da viga-parede, mostrou-se

o papel da OT na determinação de posições menos desfavoráveis de aberturas, o que é essencial para evitar o consumo desnecessário de armadura, e, conseqüentemente, ajudar a produzir estruturas com menor pegada de carbono.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. ☺

▶ REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALMEIDA, V. S.; SIMONETTI, H. L.; OLIVEIRA NETO, L. Comparative analysis of strut-and-tie models using Smooth Evolutionary Structural Optimization. *Engineering Structures*, v. 56, p. 1665-1675, 2013.
- [2] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto. Rio de Janeiro: ABNT, 2023.
- [3] BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural Optimization*, v. 1, p. 193-202, 1989.
- [4] BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 71, p. 197-224, 1988.
- [5] BRUGGI, M. Generating strut-and-tie patterns for reinforced concrete structures using topology optimization. *Computers and Structures*, v. 87, p. 1483-1495, 2009.
- [6] LIANG, Q. Q.; XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. Topology Optimization of Strut-and-Tie Models in Reinforced Concrete Structures Using an Evolutionary Procedure. *ACI Structural Journal*, v. 97, p. 322-332, 2000.
- [7] SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 21, p. 120-127, 2001.
- [8] SORIANO, H. L. Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2003.
- [9] STOIBER, N.; KROMOSER, B. Topology optimization in concrete construction: a systematic review on numerical and experimental investigations. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 64, p. 1725-1749, 2021.
- [10] UNITED NATIONS ENVIRONMENT PROGRAMME. Global Status Report for Buildings and Construction 2024/2025: Not just another brick in the wall - The solutions exist. Scaling them will build on progress and cut emissions fats. Paris: UNEP, 2025, 94 p..

Sistemas de Fôrmas para Edifícios

Recomendações para a melhoria da qualidade e da produtividade com redução de custos



ANTONIO CARLOS ZORZI

SISTEMAS DE FÔRMAS PARA EDIFÍCIOS: RECOMENDAÇÕES PARA A MELHORIA DA QUALIDADE E DA PRODUTIVIDADE COM REDUÇÃO DE CUSTOS

Autor: Antonio Carlos Zorzi

O livro propõe diretrizes para a racionalização de sistemas de fôrmas empregados na execução de estruturas de concreto armado e que utilizam o molde em madeira

As propostas foram embasadas na vasta experiência do autor, diretor de engenharia da Cyrela, sendo retiradas de sua dissertação de mestrado sobre o tema.

DADOS TÉCNICOS

ISBN 9788598576237
Formato: 18,6 cm x 23,3 cm
Páginas: 195
Acabamento: Capa dura
Ano da publicação: 2015

Patrocínio



Aquisição:
www.ibracon.org.br
(Loja Virtual)