

Numerical Modeling of Classic Concrete Beam Tests

Modelagem Numérica de Ensaios Clássicos de Vigas de Concreto Armado



A. L. GAMINO ^a
andre.gamino@uol.com.br

T. N. BITTENCOURT ^b
tulio.bittencourt@poli.usp.br

J. L. A. O. SOUSA ^c
jls@fec.unicamp.br

Abstract

The classic series of tests on reinforced concrete beams conducted by Bresler and Scordelis 40 years ago is often used to calibrate finite element analysis models. This paper describes the modeling of these tests using four finite element programs: QUEBRA2D/FEMOOP (development system), FormWorks-VecTor2-Augustus (University of Toronto, Canada), ATENA 2D (Cervenka Consulting, Czech Republic) and DIANA (TNO Building and Construction Research, The Netherlands). In the development system, appropriate finite elements and constitutive models have been implemented for the representation of steel and concrete. The performed analyses assumed perfect bond between concrete and reinforcement. However, a tension-stiffening model was considered after concrete started cracking. An anchorage system used in the experimental tests contributed to the adequacy of this assumption. Results demonstrate the efficiency of the implementations.

Keywords: beams; reinforced concrete; constitutive models; finite element method.

Resumo

A série de ensaios clássicos em vigas de concreto armado conduzida por Bresler e Scordelis há 40 anos é comumente utilizada para a calibração de modelos em análise de elementos finitos. Este artigo descreve modelagem desses ensaios com a utilização de quatro programas de análise bidimensional por elementos finitos: QUEBRA2D/FEMOOP (plataformas de desenvolvimento), FormWorks-VecTor2-Augustus (Universidade de Toronto, Canadá), ATENA 2D (Cervenka Consulting – Praga, República Tcheca), e DIANA (TNO Building and Construction Research, Delft, Holanda). Nas plataformas de desenvolvimento foram implementados modelos constitutivos e elementos finitos capazes de representar os materiais aço e concreto. As análises efetuadas admitiram aderência perfeita entre o concreto e a armadura. Considerou-se, entretanto, um modelo de tension-stiffening a partir da fissuração do concreto. A utilização de sistemas de ancoragem nas armaduras passivas levou a uma condição de aderência perfeita nas extremidades das vigas, contribuindo para a adequabilidade dessa hipótese. Os resultados obtidos demonstram a eficiência das implementações efetuadas.

Palavras-chave: vigas; concreto armado; modelos constitutivos; método dos elementos finitos.

^a Universidade de São Paulo, Escola Politécnica, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, andre.gamino@uol.com.br, Av. Prof. Almeida Prado, 271, CEP 05508-900, São Paulo-SP, Brasil.

^b Universidade de São Paulo, Escola Politécnica, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, tulio.bittencourt@poli.usp.br, Av. Prof. Almeida Prado, 271, CEP 05508-900, São Paulo-SP, Brasil.

^c Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Departamento de Estruturas, jls@fec.unicamp.br, Avenida Albert Einstein, 951, CEP 13083-852, Campinas-SP, Brasil.

1 Introdução

Na evolução da análise não linear de estruturas de concreto armado utilizando o método dos elementos finitos, o trabalho pioneiro de Scordelis na década de 1960 definiu conceitos e critérios seguidos pela comunidade de pesquisa nesta área desde então. Dentre as muitas contribuições do Prof. Scordelis estão os ensaios clássicos de doze vigas de concreto armado (Bresler; Scordelis [1]) com o objetivo preliminar de investigar o comportamento de vigas ao cisalhamento e também de produzir resultados experimentais visando apoiar trabalhos de desenvolvimento numérico em elementos finitos.

Outra grande contribuição para a modelagem da fissuração foi a efetuada por Ngo; Scordelis [2]. Apesar de inicialmente terem desenvolvido um modelo simples, houve uma abertura no campo de desenvolvimento computacional para a simulação de fissuras em estruturas de concreto.

Estas vigas foram logo consideradas pela comunidade científica como uma série clássica de ensaios. Desde então esses resultados foram largamente utilizados como dados de referência para calibração e verificação de modelagens numéricas de estruturas de concreto armado via método dos elementos finitos. Recentemente, em 2004 (Vecchio; Shim [3]), outro programa experimental desenvolvido na Universidade de Toronto reproduziu os ensaios clássicos de vigas de concreto armado, porém

com o traçado do comportamento pós-pico em termos de curvas força-deslocamento.

Neste trabalho são relatados resultados da modelagem dessas vigas utilizando as plataformas QUEBRA2D e FEMOOP, desenvolvidas no âmbito do Grupo de Modelagem de Concreto, sediado na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo e que envolve pesquisadores de outros centros de pesquisa como a Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro e a Universidade Estadual de Campinas. Essa modelagem foi desenvolvida com o intuito de averiguar a capacidade dos programas em prever o comportamento de estruturas de concreto armado. Paralelamente estes resultados foram comparados com os obtidos pelas plataformas desenvolvidas na Universidade de Toronto pelo grupo coordenado pelo Prof. Vecchio e com as respostas da viga OA3 da referência (Vecchio; Shim [3]). Esses resultados foram também confrontados com as respostas numéricas dos programas ATENA 2D, desenvolvido na República Tcheca, por Cervenka Consulting, e DIANA desenvolvido na Holanda por TNO Building and Construction Research..

2 Programas FEMOOP e QUEBRA2D

O programa QUEBRA2D (Figura 1) constitui um simulador gráfico interativo da evolução de danificação de ele-

Figura 1 – Exemplo de utilização do programa QUEBRA2D em análises de estruturas de concreto armado reforçadas com fibras de carbono

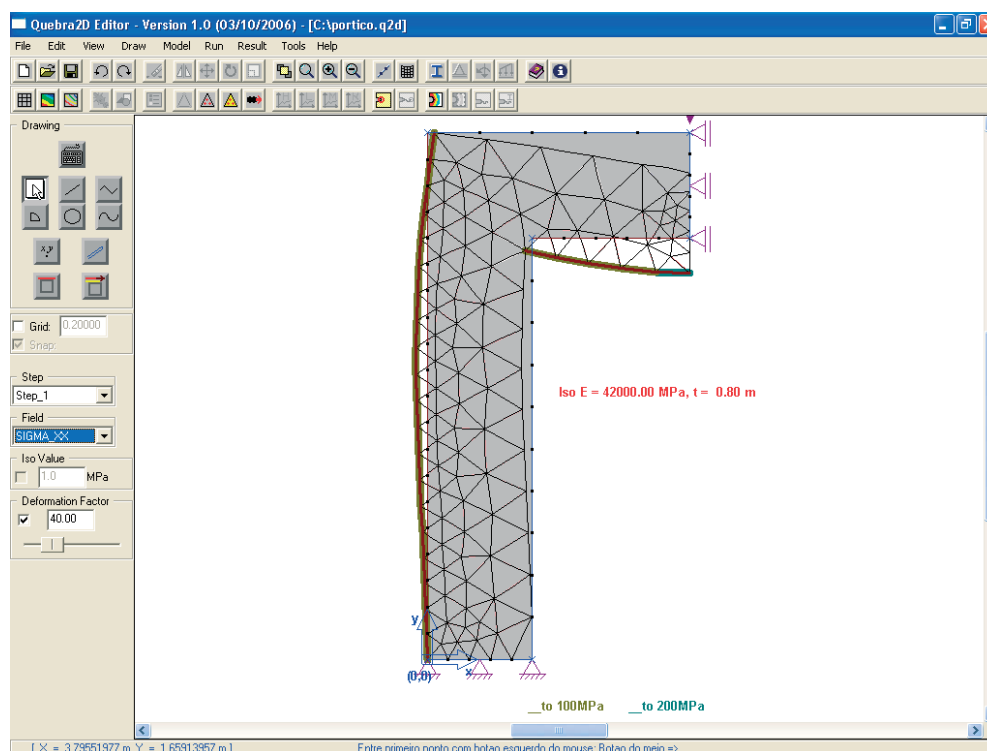
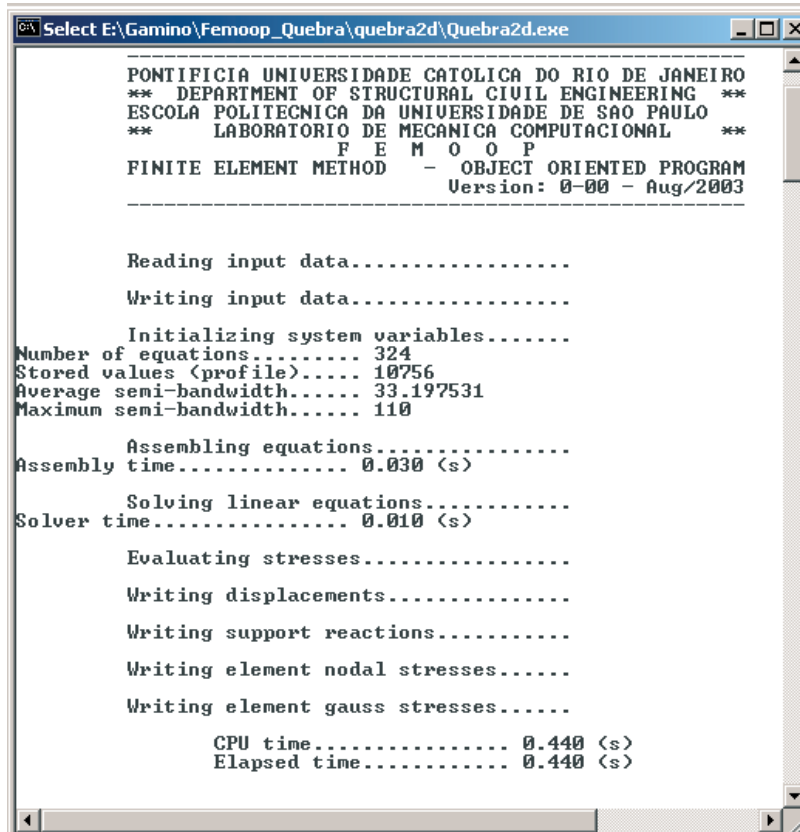


Figure 2 – FEMOOP user interface



```

Select E:\Gamino\Femooop_Quebra\quebra2d\Quebra2d.exe
-----
PONTIFICIA UNIVERSIDADE CATOLICA DO RIO DE JANEIRO
** DEPARTMENT OF STRUCTURAL CIVIL ENGINEERING **
ESCOLA POLITECNICA DA UNIUERSIDADE DE SAO PAULO
** LABORATORIO DE MECANICA COMPUTACIONAL **
      F E M O O P
FINITE ELEMENT METHOD - OBJECT ORIENTED PROGRAM
                        Version: 0-00 - Aug/2003
-----

Reading input data.....
Writing input data.....

Initializing system variables.....
Number of equations..... 324
Stored values (profile).... 10756
Average semi-bandwidth..... 33.197531
Maximum semi-bandwidth..... 110

Assembling equations.....
Assembly time..... 0.030 (s)

Solving linear equations.....
Solver time..... 0.010 (s)

Evaluating stresses.....
Writing displacements.....
Writing support reactions.....
Writing element nodal stresses.....
Writing element gauss stresses.....

CPU time..... 0.440 (s)
Elapsed time..... 0.440 (s)

```

mentos estruturais, sendo um projeto conjunto do Grupo de Modelagem de Estruturas de Concreto (GMEC) do Laboratório de Mecânica Computacional (LMC) da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP) e o Tecgraf da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio). QUEBRA2D atua como gerenciador de entrada e saída de dados e gerador de malhas adaptativas,. Todo o pós-processamento é efetuado no QUEBRA2D, incluindo a computação de parâmetros de fraturamento e geração de modelos correspondentes a sucessivos passos de propagação de fissuras.

Em conjunto com o QUEBRA2D, é utilizado o FEMOOP ("Finite Element Method – Object Oriented Programming"), no qual estão implementadas toda a formulação do Método dos Elementos Finitos (MEF) e os algoritmos de análise numérica. O programa FEMOOP (Figura 2) é baseado no paradigma da programação orientada para objetos, sendo desenvolvido na linguagem de programação C++. Em ambas plataformas computacionais, QUEBRA2D e FEMOOP, foram implementadas rotinas necessárias à simulação de estruturas de concreto.

QUEBRA2D funciona como pré e pós-processador, sendo responsável pelo lançamento e edição de todos os atributos competentes à análise. FEMOOP é o módulo de análise

(solver) do sistema, e tem por objetivo processar o arquivo de atributos da análise gerado pelo QUEBRA2D, chamado arquivo neutro e salvar os resultados em um arquivo de pós-processamento que retorna ao programa QUEBRA2D para visualização de resultados.

3 Detalhes das Vigas de Bresler e Scordelis

As doze vigas ensaiadas foram divididas em quatro grupos contendo três vigas cada um assim definidos: o grupo OA (somente armaduras longitudinais de tração, sem estribos ou armaduras longitudinais de compressão) e grupos A, B e C (com estribos e armaduras longitudinais de tração e de compressão). As vigas pertencentes a cada grupo possuíam vãos diferentes e dimensões próximas de base e altura. A Tabela 1 apresenta o resumo dos dados das vigas ensaiadas. A Tabela 2 apresenta as propriedades físicas e mecânicas dos materiais aço e concreto utilizados.

As vigas foram ensaiadas em três pontos com carregamento monotônico aplicado no meio do vão. Os estágios de carregamento foram feitos inicialmente em 40 kN e próximo da ruptura em 20 kN. Todas as vigas foram ensaiadas aos 13 dias de idade.

Tabela 1 – Detalhes das vigas ensaiadas por Bresler e Scordelis

Viga	b_w (mm)	h (mm)	d (mm)	L (mm)	Vão(mm)	A_s	A'_s	A_{sw}/s
OA1	310	556	461	4100	3660	4 n° 9	---	---
OA2	305	561	466	5010	4570	5 n° 9	---	---
OA3	307	556	462	6840	6400	6 n° 9	---	---
A1	307	561	466	4100	3660	4 n° 9	2 n° 4	n° 2 c/ 210
A2	305	559	464	5010	4570	5 n° 9	2 n° 4	n° 2 c/ 210
A3	307	561	466	6840	6400	6 n° 9	2 n° 4	n° 2 c/ 210
B1	231	556	461	4100	3660	4 n° 9	2 n° 4	n° 2 c/ 190
B2	229	561	466	5010	4570	4 n° 9	2 n° 4	n° 2 c/ 190
B3	229	556	461	6840	6400	5 n° 9	2 n° 4	n° 2 c/ 190
C1	155	559	464	4100	3660	2 n° 9	2 n° 4	n° 2 c/ 210
C2	152	559	464	5010	4570	4 n° 9	2 n° 4	n° 2 c/ 210
C3	155	554	459	6840	6400	4 n° 9	2 n° 4	n° 2 c/ 210

4 Análise pelo Método dos Elementos Finitos

4.1 Modelo Constitutivo: Concreto Íntegro

O modelo constitutivo adotado nas modelagens bidimensionais e implementado no sistema QUEBRA2D/FEMOOP foi o modelo de Ottosen [4]. Trata-se de um modelo de quatro parâmetros ("A", "B", "K₁", "K₂") cujo funcional é representado por:

$$F = A \frac{J_2}{f_{cm}^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + B \frac{I_1}{f_{cm}} - 1 = 0 \quad (1)$$

sendo

A, B, K₁ e K₂: parâmetros determinados experimentalmente,
f_{cm}: a resistência à compressão média do concreto,
I₁: o primeiro invariante do tensor de tensões,
J₂: o segundo invariante do tensor desviador de tensões e
λ: calculado segundo os parâmetros K₁, K₂ e o invariante cos(3θ).

A superfície de ruptura é a descrita por esse funcional. A calibração paramétrica foi efetuada com base em testes realizados dentre as propostas de Ottosen [4], CEB [5] e Dahl [6]. Segundo testes conduzidos por Hartl [7] em ensaios biaxiais no concreto, os melhores resultados foram alcançados segundo a formulação de Dahl [6] cujos parâmetros podem ser calculados por meio de:

$$x = \frac{f_{cm}}{100 [MPa]}$$

$$A = -1.66 x^2 + 3.49 x + 0.73$$

$$B = -0.19 x^2 + 0.41 x + 3.13$$

$$K_1 = 0.46 x^2 - 0.97 x + 11.89$$

$$K_2 = -0.02 x^2 + 0.04 x + 0.974 \quad (2)$$

Na zona de tração-tração, a superfície de ruptura de Ottosen [4] se aproxima do modelo de Rankine. A definição da superfície da plastificação é feita por meio de plasticidade associativa e o balanço energético é feito segundo algoritmo de retorno proposto por Owen; Hinton [8].

Nas plataformas da Universidade de Toronto (FormWorks-VecTor2-Augustus) foi utilizado para o concreto comprimido (pré-pico) o modelo constitutivo de Hognestad (VecTor2 [9]) cuja expressão é definida como:

$$\sigma = \sigma_c \left[\frac{2\varepsilon}{\varepsilon_c} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right)^2 \right] \quad (3)$$

sendo σ_c e ε_c , respectivamente, a tensão e a deformação limites do concreto utilizado. Para o concreto tracionado foi utilizado um modelo de Rankine.

O modelo para o concreto em pós-pico, em compressão, foi definido conforme dois modelos:

- O modelo modificado de Park (maiores detalhes deste modelo são apresentados em VecTor2 [9])
- Um modelo de amolecimento na compressão descrito em Vecchio [10].

Para a avaliação da contribuição do concreto entre fissuras no banzo tracionado foi utilizado um modelo descrito em (Bentz [11]).

No programa ATENA 2D foi utilizado um modelo biaxial denominado SBETA definido em Chen; Saleeb [12], com comportamento não linear na compressão segundo o modelo de Kupfer et al. [13]. No ramo de compressão-compressão este critério estabelece que:

$$\sigma_c = \frac{1 + 3,65 a}{(1 + a^2)} f_c; \quad a = \frac{\sigma_{c1}}{\sigma_{c2}} \quad (4)$$

sendo f_c a resistência à compressão do concreto, σ_{c1} e σ_{c2} as tensões principais no concreto e σ_c a nova resistência à compressão do concreto na situação de compressão-compressão (solicitação biaxial).

No programa DIANA são utilizados modelos de plasticidade combinados quando a estrutura simulada apresenta simultaneamente zonas tracionadas e comprimidas. Neste caso o modelo para o concreto tracionado é o de Rankine e para o concreto comprimido podem ser utilizados os modelos de Drucker-Prager ou de Mohr-Coulomb.

4.2 Modelo Constitutivo: Concreto Fissurado

Acoplado com o modelo de integridade física, implementou-se um modelo de fissuração distribuída do tipo rotacional cujo critério de aparecimento de fissuras está relacionado com as tensões de tração nos pontos de integração dos elementos finitos (oriundas da utilização do modelo de Ottosen [4]), comparadas com a resistência à tração do material. Após o aparecimento da primeira fissura utiliza-se um modelo de amolecimento linear em tração. O mesmo modelo foi utilizado para as modelagens com o programa ATENA 2D. No sistema (FormWorks-VecTor2-Augustus) utilizou-se o modelo definido em Vecchio [10] para o amolecimento em compressão e modelo linear de amolecimento em tração. A fissuração foi retratada via modelo distribuído rotacional. No programa DIANA o comportamento pós-pico em tração também foi modelado supondo amolecimento linear e fissuração distribuída rotacional. Para endurecimento em compressão foi utilizado o modelo de Thorenfeldt (Diana User's Manual [14]).

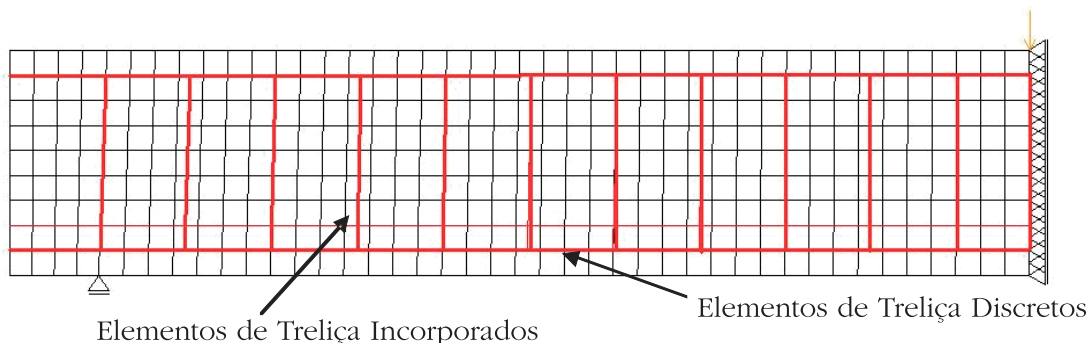
Partindo da utilização do modelo linear de amolecimento na tração, as aberturas das fissuras podem ser obtidas por meio de:

$$w^{cr} = \frac{2 G_f}{f_t}; \quad \text{ou } w^{cr} = \varepsilon^{cr} \cdot h^{cr} \quad (5)$$

Tabela 2 – Propriedades dos materiais utilizados nas vigas ensaiadas por Bresler e Scordelis

Aço						
Barra	Diâmetro (mm)	Área (mm ²)	f_y (MPa)	f_u (MPa)	E_s (MPa)	
nº 9	28.7	645	555	933	218000	
nº 4	12.7	127	345	542	201000	
nº 2	6.4	32.2	325	430	190000	
Concreto						
Viga		f_c (MPa)		f_t (MPa)		
OA1		22.6		3.97		
OA2		23.7		4.34		
OA3		37.6		4.14		
A1		24.1		3.86		
A2		24.3		3.73		
A3		35.1		4.34		
B1		24.8		3.99		
B2		23.2		3.76		
B3		38.8		4.22		
C1		29.6		4.22		
C2		23.8		3.93		
C3		35.1		3.86		

Figura 3 – Malha típica utilizada nas modelagens



sendo w^{cr} a abertura das fissuras, G_f a energia de fratura no modo I, ε^{cr} a deformação da fissura e h^{cr} a largura de banda de fissuração obtida por meio da raiz quadrada da área do elemento finito utilizado na modelagem.

As aberturas das fissuras foram computadas a partir das deformações nas fissuras que são dependentes dos modelos de ruptura adotados para o concreto e as armaduras de aço. As taxas de armadura utilizadas influem no nível de tensão no lado tracionado da estrutura que afetam as aberturas das fissuras. Conseqüentemente as aberturas nas fissuras são menores para taxas de armadura mais elevadas. As aberturas de fissuras dependem também do modelo de tension-stiffening adotado.

4.3 Modelo Constitutivo: Armaduras

Para as armaduras foi utilizado o modelo de plasticidade de von Mises do tipo elastoplástico com encruamento linear. Neste caso o funcional que define a superfície de plastificação é definido como:

$$F = \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_y} - 1 = 0; \lambda = \text{constant} \quad (6)$$

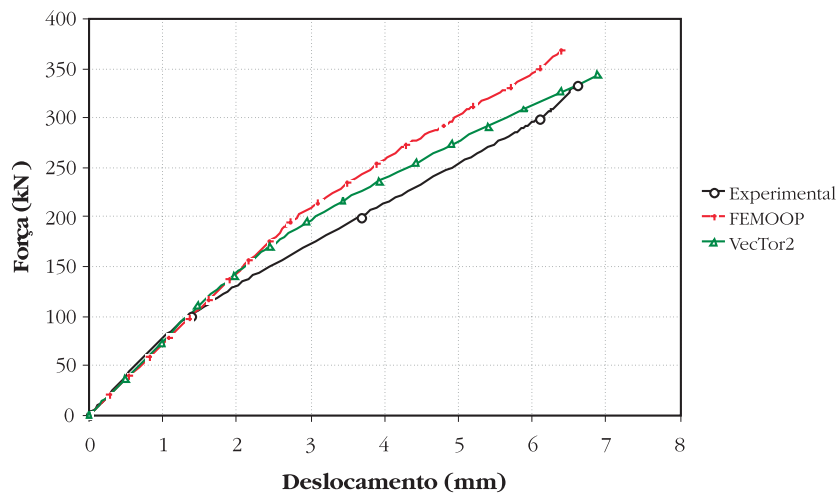
sendo f_y a tensão de escoamento do material. Entretanto, para uma situação uniaxial, bastaria utilizar um

Tabela 3 – Resultados obtidos nas modelagens das vigas ensaiadas por Bresler e Scordelis

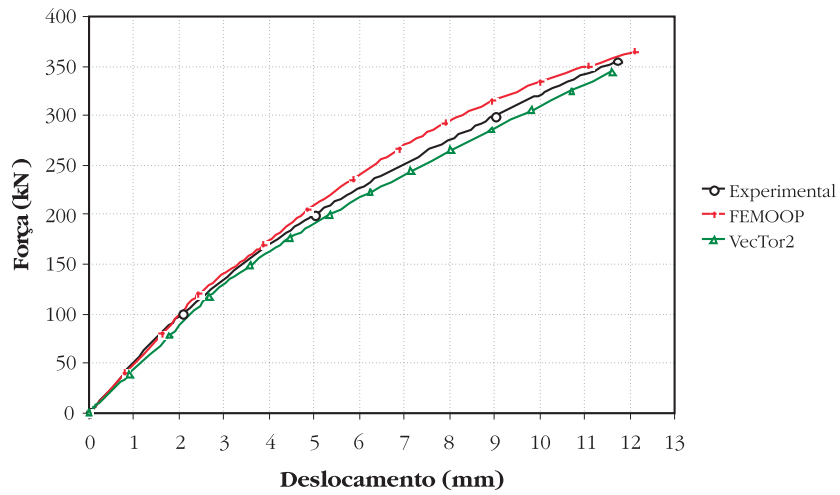
Viga	P_u (kN)			Δ (%)		δ_u (mm)			Δ (%)	
	Exp.	VecTor2	FEMOOP	VecTor2	FEMOOP	Exp.	VecTor2	FEMOOP	VecTor2	FEMOOP
OA1	334	343	368	2.69	9.24	6.6	6.9	6.4	4.55	-7.25
OA2	356	344	365	-3.37	2.47	11.7	11.6	12.1	-0.85	4.31
OA3	378	359	380	-5.03	0.53	27.9	29.6	27	6.09	-8.78
A1	468	533	439	13.89	-6.61	14.2	14.8	7.56	4.23	-48.92
A2	490	529	509	7.96	3.73	22.9	21.4	19.2	-6.55	-10.28
A3	468	430	456	-8.12	-2.63	35.8	35.9	34.2	0.28	-4.74
B1	446	506	415	13.45	-7.47	13.7	14.7	10.2	7.30	-30.61
B2	400	346	406	-13.50	1.48	20.8	20.5	22.5	-1.44	9.76
B3	356	358	360	0.56	1.11	35.3	35.9	38.2	1.70	6.41
C1	312	332	328	6.41	4.88	17.8	17.8	14.8	0.00	-16.85
C2	324	287	314	-11.42	-3.18	20.1	19.6	21.6	-2.49	10.20
C3	270	256	222	-5.19	-21.62	36.8	37.4	31.9	1.63	-14.71

Observação: os resultados em termos de carga de ruptura e deslocamento na ruptura obtidos nas modelagens da viga OA3 realizadas no ATENA 2D e DIANA foram respectivamente: 400 kN (5,82%) e 30,2 mm (8,24%), 402 kN (6,35%) e 29,9 mm (7,17%); a variação percentual dos resultados foi obtida por meio de: $\Delta(\%) = \{((\text{resultado do modelo}) - (\text{resultado experimental})) / (\text{resultado experimental})\} \cdot 100\%$.

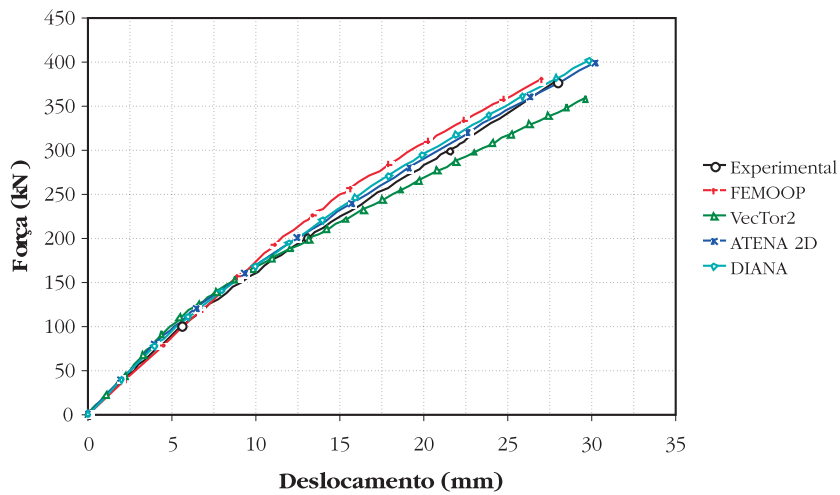
Figura 4 – Curvas Força-Deslocamento obtidos para as vigas da série OA



a) Viga OA1

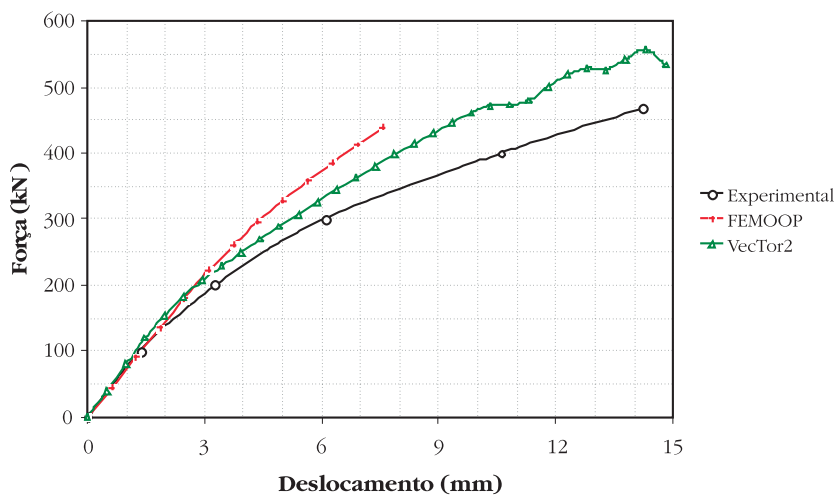


b) Viga OA2

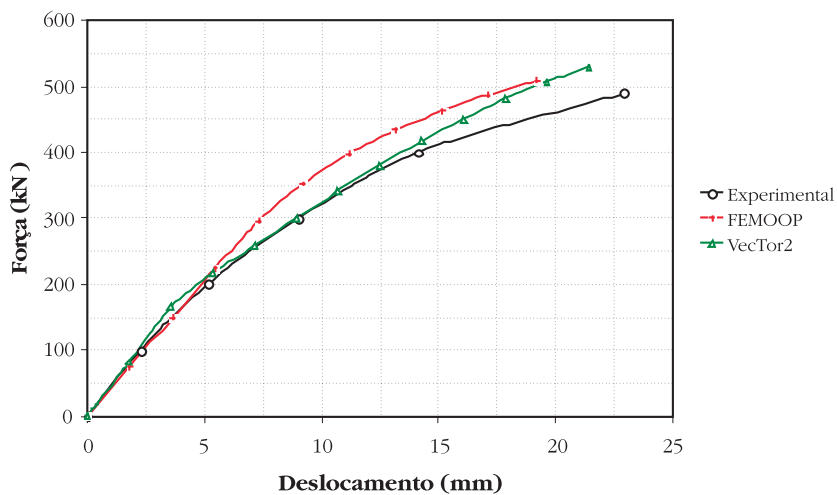


c) Viga OA3

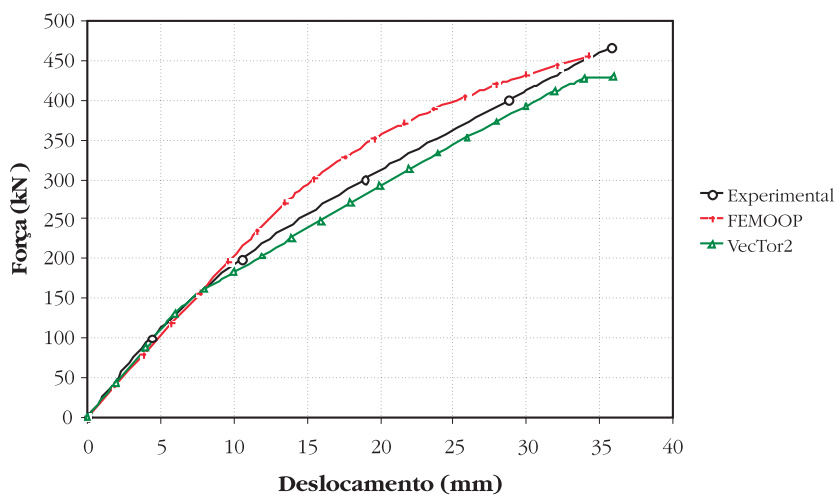
Figura 5 – Curvas Força-Deslocamento para as vigas da série A



a) Viga A1

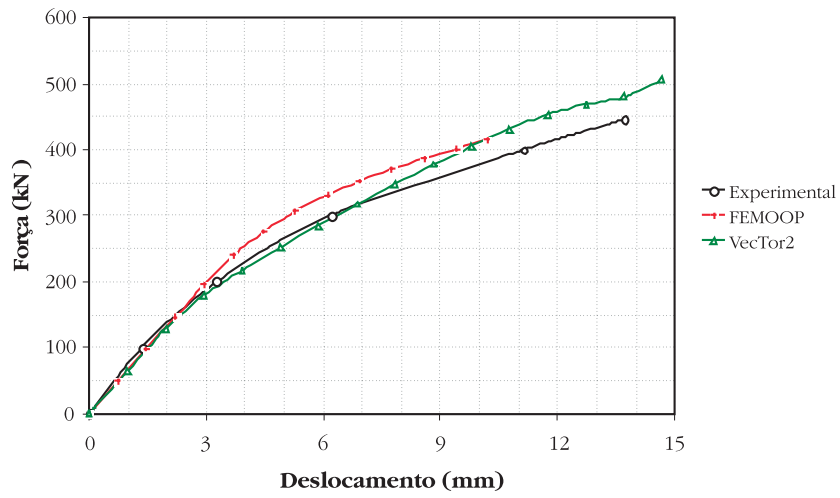


b) Viga A2

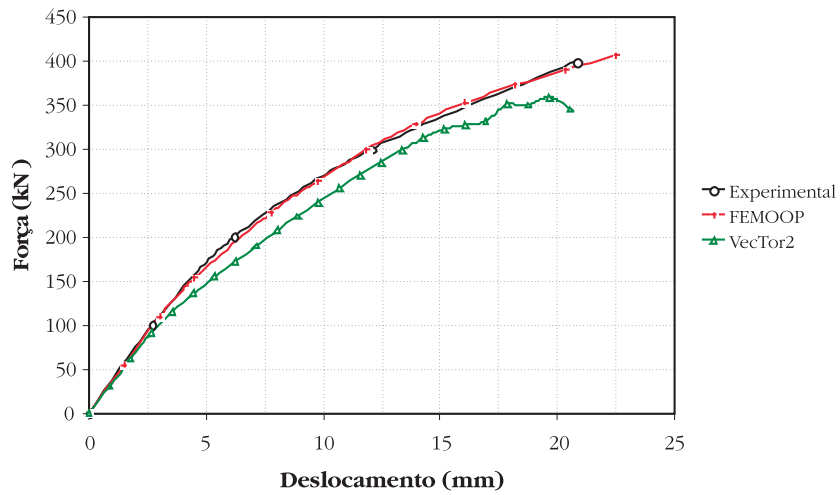


c) Viga A3

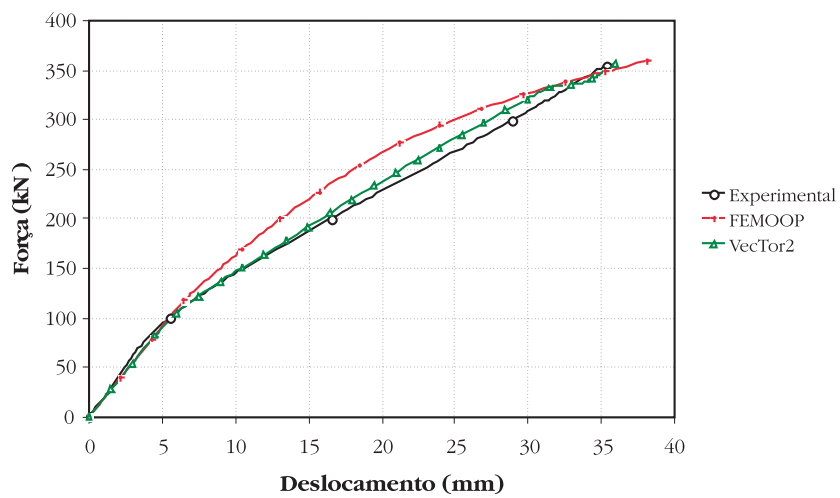
Figura 6 – Curvas Força-Deslocamento para as vigas da série B



a) Viga B1

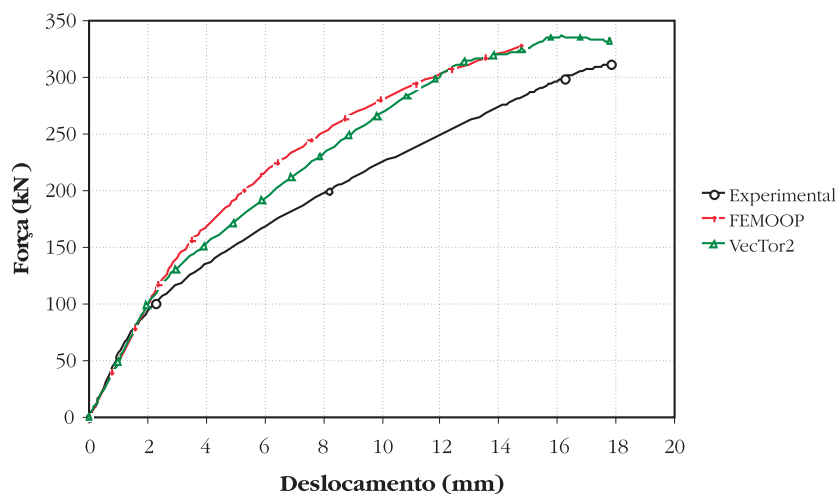


b) Viga B2

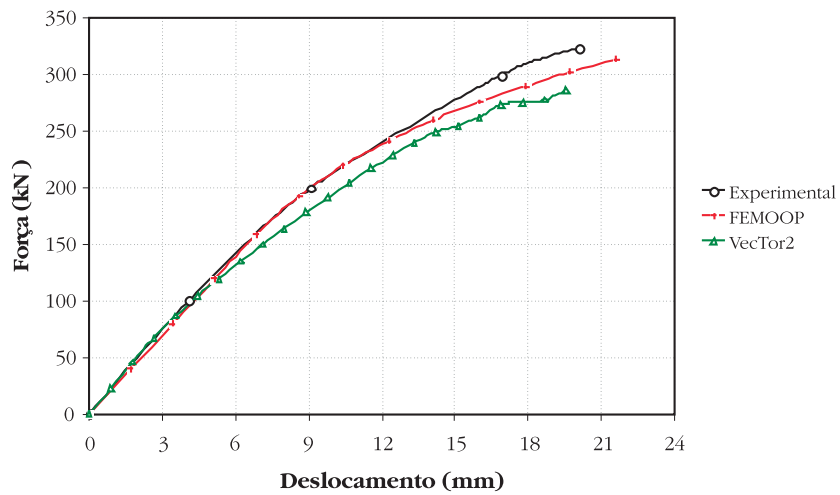


c) Viga B3

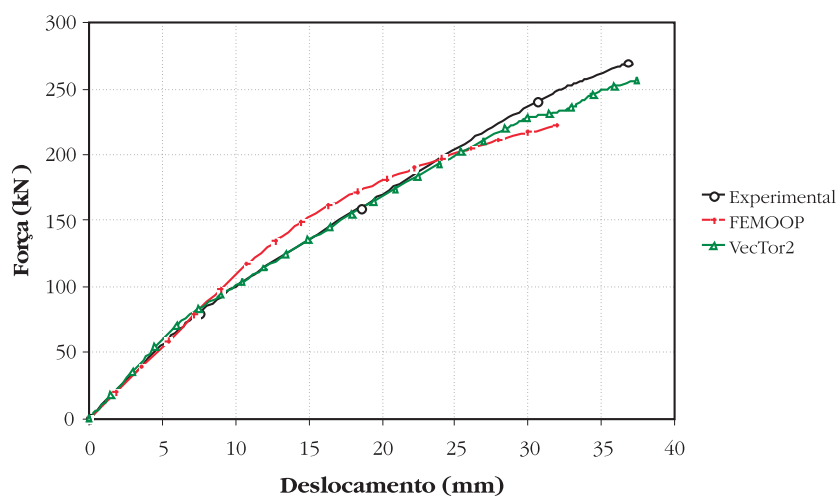
Figura 7 – Curvas Força-Deslocamento para as vigas da série C



a) Viga C1



b) Viga C2



c) Viga C3

modelo isotrópico comparando-se diretamente as tensões axiais obtidas com o valor da resistência ao escoamento do material. Pode também ser utilizado um modelo com encruamento linear no qual são informadas as tensões de plastificação e ruptura das armaduras de aço. A malha típica utilizada nas modelagens encontra-se na Figura 3. Nela podem ser observadas algumas armaduras lançadas como discretas e outras como incorporadas na malha. Os elementos finitos utilizados para o concreto foram quadráticos de oito nós (Q8) e para as armaduras elementos isoparamétricos unifilares lineares (dois nós). Todas as análises foram feitas sob a hipótese de estado plano de tensões.

5 Aspectos Importantes para Validação de Programas de Elementos Finitos

Em geral, curvas do tipo força-deslocamento são utilizadas por diversos pesquisadores para a validação de programas ou implementações em elementos finitos no tocante à capacidade de prever o comportamento de estruturas de concreto. Entretanto, além do comportamento global, deve ser avaliado o comportamento de cada material empregado na estrutura..

Assim, além das curvas força-deslocamento outros critérios devem ser utilizados tais como:

- Abertura de fissuras e padrão de fissuração obtidos, comparados com a resposta experimental;
- Tensões ou deformações nas armaduras e evolução destas ao longo do carregamento aplicado;
- Deformações no concreto.

Portanto, considera-se validado um procedimento de análise caso as respostas numéricas encontradas reproduzam adequadamente os resultados experimentais com relação aos critérios mencionados.

6 Resultados Obtidos

A Tabela 3 ilustra os resultados obtidos em termos de carga de ruptura e deslocamentos na ruptura resultantes das modelagens efetuadas com os quatro sistemas utilizados. As curvas força-deslocamento obtidas encontram-se nas Figuras 4 a 7.

De um modo geral obteve-se boa correlação entre as respostas numéricas e os resultados experimentais de Bresler e Scordelis. Particularmente os deslocamentos calculados com o programa FEMOOP ficaram muito próximos das respostas experimentais, sobretudo para as vigas sem estribos (OA1, OA2 e OA3), e também para as vigas A3, B1, B2 e C2. Em termos de carga de ruptura os valores encontrados nas modelagens efetuadas no FEMOOP tiveram boa correlação com os ensaios experimentais para todas as vigas com exceção da viga C3.

Já o sistema VecTor2 produziu respostas mais coerentes com os resultados de Bresler e Scordelis em termos de deslocamentos que em termos de carga de ruptura. A utilização de diferentes modelos constitutivos levou às respostas variadas encontradas pelo FEMOOP e VecTor2. Para a viga C1 os deslocamentos obtidos pela via numérica foram os mesmos obtidos pela via experimental.

É importante salientar que a utilização de um modelo de amolecimento linear, com parâmetros constantes, para as vigas de Bresler e Scordelis, com elevada taxa de armadura de flexão e com barras de elevado diâmetro, tem uma influência significativa nos resultados. Normalmente, esses modelos lineares de tension-stiffening têm seus parâmetros estabelecidos para vigas com taxas de armaduras moderadas ou baixas, e com barras de diâmetros menores que os utilizados nesses ensaios.

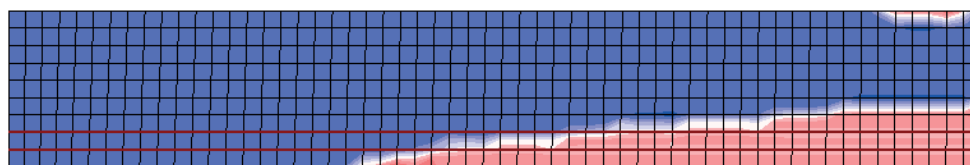
Com a finalidade de averiguar outras respostas numéricas produzidas pelos programas, foram visualizadas as aberturas das fissuras (Figura 8) e as tensões nas armaduras longitudinais de tração (Figura 9) com a evolução das deformações com a aplicação do carregamento (Figura 10) para a viga OA3. Foram inclusive utilizados outros dois programas, ATENA 2D e DIANA. Nessa viga, todas as respostas numéricas em termos de carga-deslocamento situaram-se próximas do comportamento experimental; particularmente, as respostas obtidas pelo ATENA 2D e DIANA foram praticamente as mesmas. Os padrões de fissuração numéricos que mais se aproximaram das experimentais (Figura 8) foram os obtidos com FEMOOP e com ATENA 2D.

Na Figura 8, o padrão de fissuração obtido numericamente é de muitas fissuras pouco espaçadas, enquanto o padrão observado experimentalmente é de poucas fissuras mais espaçadas. As vigas de Bresler e Scordelis apresentam uma elevada taxa de armadura de flexão e foram armadas com barras de elevado diâmetro. Isto dificulta a aproximação do padrão de fissuração com um modelo de tension-stiffening linear de parâmetros constantes. Este modelo deveria levar em conta o diâmetro das barras e a taxa de armadura tracionada para representar adequadamente a contribuição do concreto entre fissuras. Portanto, essa divergência entre os padrões de fissuração leva a curvas força-deslocamento obtidas numericamente mais rígidas que as curvas experimentais.

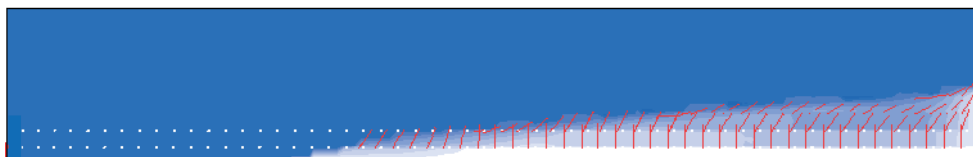
Com o programa FEMOOP obteve-se uma abertura máxima de fissuras na região tracionada de 0,29 mm em comparação com 0,30 mm obtida com VecTor2, 0,28 mm com DIANA e 0,51 mm com ATENA 2D. Já as tensões de cisalhamento obtidas para o concreto na região do apoio foram de 3,10 MPa e 3,21 MPa respectivamente para FEMOOP e VecTor2. Para ATENA 2D e DIANA, os valores encontrados foram respectivamente de 2,68 MPa e 3,29 MPa. Observa-se também uma deformação máxima avaliada numericamente nas armaduras longitudinais de tração de 1,86‰ e 1,91‰ respectivamente para FEMOOP e VecTor2. Para ATENA 2D e DIANA as deformações nas armaduras ficaram respectivamente em 2,0‰ e 1,94‰. Isso indica a tendência de proximidade de respostas em modelagens computacionais para as quatro plataformas em questão.

A Tabela 4 apresenta os resultados numéricos de abertura de fissuras comparados aos valores experimentais encontrados nos ensaios de Vecchio; Shim [3] (pois os ensaios de Bresler e Scordelis só possuem informação das curvas força-deslocamento obtidas). A comparação entre abertura de fissuras teria mais sentido para cargas de serviço, porém, só estavam disponíveis as aberturas para a carga de ruptura. Tais vigas possuíam características semelhan-

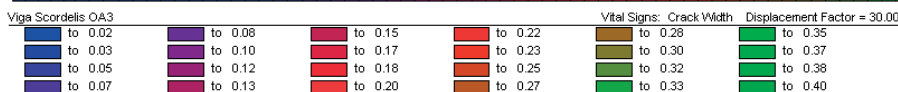
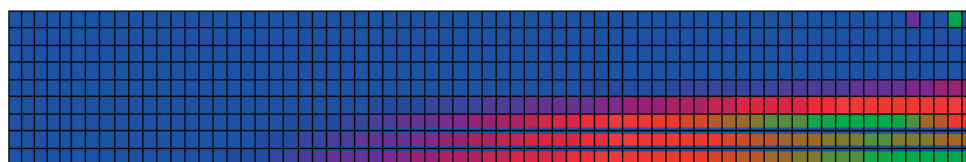
Figura 8 – Quadro de fissuração obtido para a viga OA3 ensaiada por Bresler e Scordelis



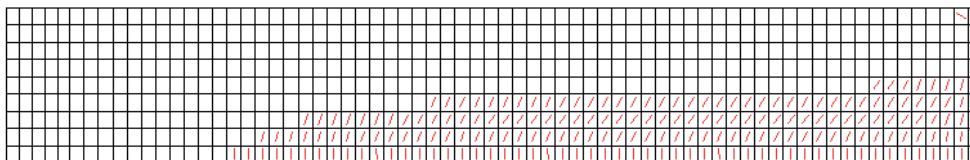
Abertura de fissuras em "mm": FEMOOP



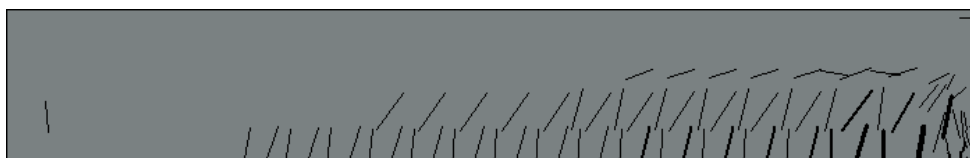
Ângulo de incidência das fissuras: FEMOOP



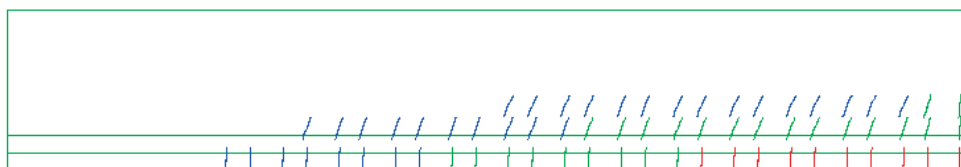
Abertura de fissuras em "mm": VecTor2



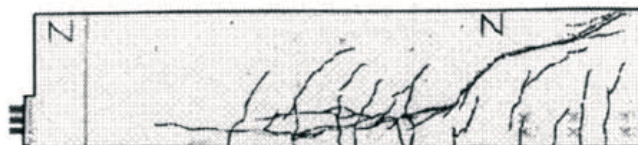
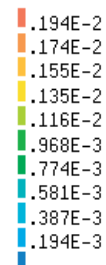
Ângulo de incidência das fissuras: VecTor2



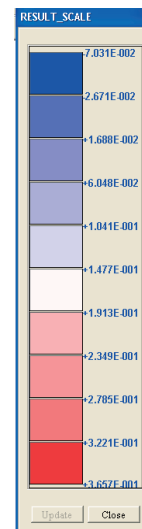
Abertura de fissuras em "mm": ATENA 2D Máximo de 0,51mm



Deformação nas fissuras: DIANA; a deformação máxima corresponde a uma abertura de 0,28mm



Padrão de fissuração obtida experimentalmente



tes às vigas de Bresler e Scordelis com um único diferencial em termos do diâmetro das barras (porém com mesma taxa geométrica de armadura de flexão e cisalhamento). Isto impossibilitou a comparação em termos de tensões nas armaduras de tração. O concreto e demais características das vigas eram similares.

De uma maneira geral os resultados encontrados foram satisfatórios. Entretanto os programas não foram capazes de prever as grandes aberturas de fissuras das vigas A2, A3, B2 e B3.

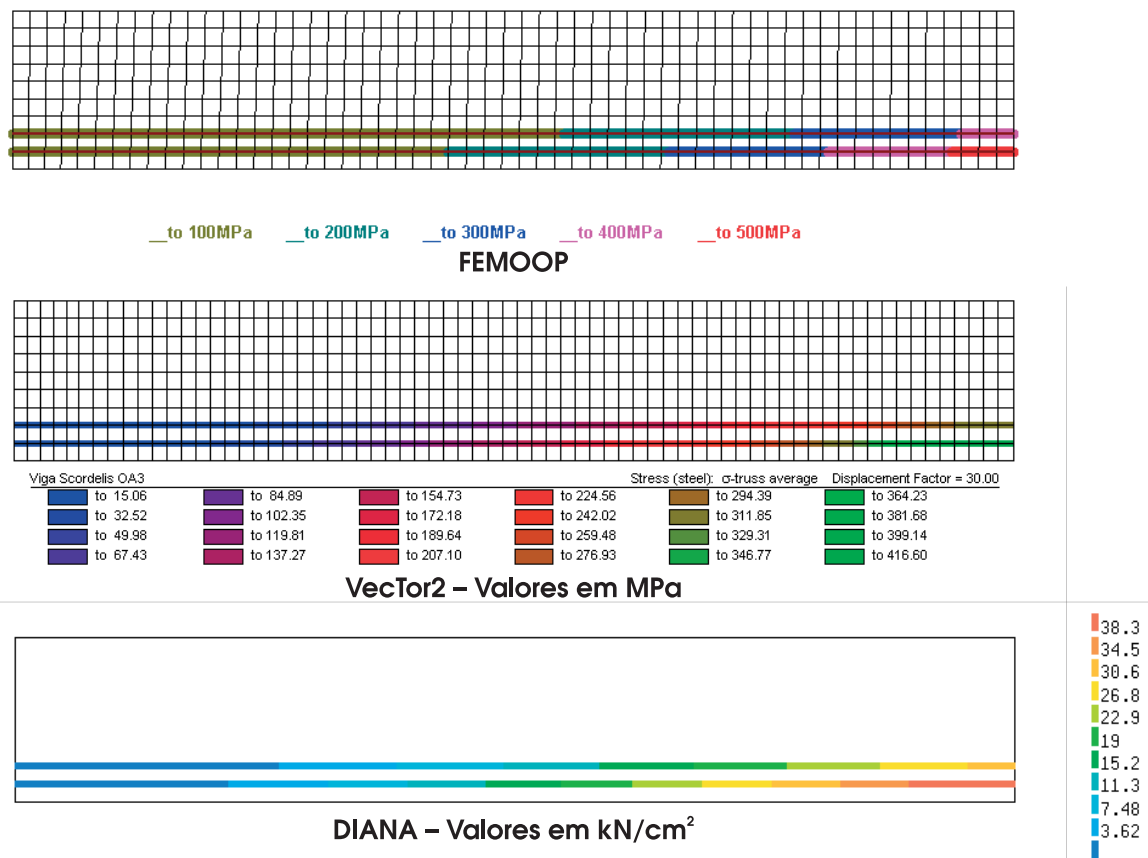
7 Conclusões

Este trabalho procurou reproduzir numericamente ensaios clássicos de vigas de concreto armado a fim de validar um programa de elementos finitos, FEMOOP, em desenvolvimento contínuo pelo grupo de pesquisa. As respostas produzidas pelo programa FEMOOP foram também comparadas com respostas obtidas com o programa VecTor2, desenvolvido na Universidade de Toronto, com o programa ATENA 2D desenvolvido por Cervenka Consulting, República Tcheca, e com o programa DIANA desenvolvido pelo

TNO Building and Construction Research, Holanda . Os resultados permitem concluir que:

- a) De um modo geral obteve-se boa correlação entre as respostas numéricas e os resultados experimentais de Bresler e Scordelis;
- b) Os deslocamentos determinados com o programa FEMOOP ficaram muito próximos das respostas experimentais, sobretudo para as vigas sem estribos (OA1, OA2 e OA3), e também para as vigas A3, B1, B2 e C2;
- c) Em termos de carga de ruptura, os valores encontrados com o FEMOOP tiveram boa correlação com os resultados experimentais para todas as vigas com exceção da viga C3;
- d) Já o programa VecTor2 produziu respostas mais coerentes com os resultados de Bresler e Scordelis em termos de deslocamento que em termos de carga de ruptura. Para a viga C1 o deslocamento numérico obtido foi o mesmo apresentado pela viga ensaiada; os diferentes modelos constitutivos usados em cada programa levaram às diferentes respostas encontradas;
- e) Na viga OA3 todas as respostas numéricas em termos de carga-deslocamento situaram-se próximas às observações experimentais; particularmente as respostas obtidas com

Figura 9 – Tensões normais nas armaduras longitudinais de tração obtidas para a viga OA3 ensaiada por Bresler e Scordelis



ATENA 2D e DIANA, que foram praticamente as mesmas.
 f) De uma maneira geral os resultados encontrados em termos de aberturas de fissuras para todas as vigas conforme a Tabela 4 foram satisfatórios porém os programas não foram capazes de prever adequadamente as grandes aberturas de fissuras das vigas A2, A3, B2 e B3; o modelo de fissuração distribuída adotado é interessante para a previsão de aberturas de fissuras até 1,0 mm; melhores resultados quanto à previsão de fissuras com grande abertura poderiam ser obtidos com um modelo de fissuração incorporada para prever fortes descontinuidades.
 g) Os resultados obtidos fornecem fortes indicativos de que o programa FEMOOP seja capaz de representar com

suficiente realismo o comportamento de estruturas de concreto a partir das implementações realizadas neste trabalho.

8 Referências bibliográficas

[01] Bresler, B., Scordelis, A.C., Shear strength of reinforced concrete beams. Journal of American Concrete Institute, v. 60, n. 1, pp.51-74, 1963.
 [02] Ngo, D., Scordelis, A.C., Finite element analysis of reinforced concrete beams. ACI Journal, v.64, n.3, pp.152-163, 1967.

Figura 10 – Evolução das deformações nas armaduras longitudinais de tração obtidas para a viga OA3 ensaiada por Bresler e Scordelis

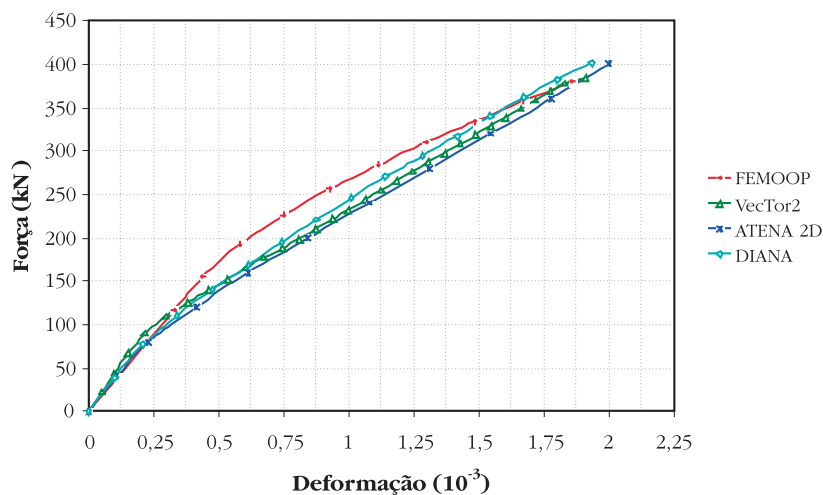


Tabela 4 – Resultados obtidos para as aberturas de fissuras nas vigas ensaiadas por Vecchio; Shim (2)

Viga	Experimental	w ^{cr} (mm)		Δ(%)	
		VecTor2	FEMOOP	VecTor2	FEMOOP
OA1	0.40	0.30	0.29	-25.00	-27.50
OA2	0.30	0.25	0.22	-16.67	-26.70
OA3	0.35	0.27	0.58	-22.86	65.71
A1	0.50	0.51	0.57	2.00	14.00
A2	1.40	0.79	0.59	-43.57	-57.86
A3	1.60	0.49	0.46	-69.38	-71.30
B1	0.75	0.88	0.61	17.33	-18.67
B2	1.60	0.83	0.69	-48.13	-56.87
B3	1.60	0.58	0.71	-63.75	-55.63
C1	2.50	3.11	2.71	24.40	8.40
C2	0.40	0.70	0.52	75.00	30.00
C3	0.90	0.37	0.59	-58.89	-34.44

- [03] Vecchio, F.J., Shim, W., Experimental and Analytical Re-examination of Classic Concrete Beam Tests. *ASCE Journal of Structural Engineering*, v.130, n.3, pp.460-469, 2004.
- [04] Ottosen, N.S., A failure criterion for concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, v.103, n.4, pp.527-535, 1977.
- [05] Comité Euro – International du Béton, Model Code for Concrete Structures. CEB – FIP MC 90, 437p., 1993.
- [06] Dahl, K.K.B., A failure criterion for normal and high strength concrete. Technical University of Denmark, Lyngby, 1992.
- [07] Hartl, H., Development of a continuum-mechanics-based for 3D finite element analysis of reinforced concrete structures and application to problems of soil-structure interaction. Tese de Doutorado, Technische Universität Graz, Áustria, 250p, 2002.
- [08] Owen, D.R.J., Hinton, E., *Finite Elements in Plasticity – Theory and Practice*. Pineridge Press, 1980.
- [09] VecTor2 & FormWorks, User's manual, August, 232p., 2002.
- [10] Vecchio, F.J., Finite element modeling of concrete expansion and confinement. *ASCE Journal of Structural Engineering*, v.18, n.9, pp.2390-2406, 1992.
- [11] Bentz, E.C., Sectional analysis of reinforced concrete members. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Toronto, 310p., 2000.
- [12] Chen, W.F., Saleeb, A.F., *Constitutive equations for engineering materials*. John Willey & Sons, 1982.
- [13] Kupfer, H., Hilsdorf, H.K., Rüşh, H., Behavior of concrete under biaxial stress. *ACI Journal*, v.66, n.8, pp.656-666, 1969.
- [14] Diana User's Manual – Material Library, TNO Building and Construction Research, 454p., 2002.