

Design of Reinforced Concrete Two-dimensional Structural Elements: Membranes, Plates and Shells

Dimensionamento de Elementos de Superfície de Concreto Armado: Membranas, Placas e Cascas



R. CHEN ^a
reinaldochen@hotmail.com

J. C. DELLA BELLA ^b
dbella@usp.br

Abstract

Criteria and methodology for the design of concrete *membrane elements* with orthogonal reinforcement are presented. It is assumed that the internal forces (n_{sdx} ; n_{sdy} ; v_{sd}) are determined from an elastic linear structural analysis. The theoretical fundamentals for reinforcement calculation and concrete crushing evaluation are reviewed. Also, the state of strain is evaluated, and it is proposed a procedure to estimate crack widths. Elastic linear structural analysis of *shell elements*, on the other hand, makes it possible to identify eight stress resultants: membrane (n_{sdx} ; n_{sdy} ; v_{sd}), flexural (m_{sdx} ; m_{sdy} ; m_{sdx}) and transverse shear (v_{sx} ; v_{sy}) forces. The three layer model proposed by CEB [1] provides a resistant mechanism for the design of elements with reinforcement consisting of a mesh of orthogonal bars. Procedures for reinforcement dimensioning and detailing are presented, considering the different layers capacities, the iterative process and the allowable simplifications. The computational procedure proposed by Lourenço & Figueiras [2] is implemented and critically reviewed.

Keywords: reinforced concrete, design, membranes, plates, shells.

Resumo

Neste trabalho são apresentados procedimentos para o dimensionamento de elementos de *membrana* com armaduras em malha ortogonal, dados os esforços solicitantes (n_{sdx} ; n_{sdy} ; v_{sd}) provenientes de análise estrutural elástica-linear. É feita uma revisão dos fundamentos teóricos que orientam a determinação das armaduras necessárias e a verificação do concreto. O problema das deformações e da fissuração em elementos de membrana é abordado, sendo proposto um procedimento para a estimativa da abertura de fissuras. A análise estrutural elástica-linear de elementos de *casca*, por sua vez, permite a obtenção de oito resultantes de tensões: solicitações de membrana (n_{sdx} ; n_{sdy} ; v_{sd}) e de placa (m_{sdx} ; m_{sdy} ; m_{sdx}), além de solicitações de cisalhamento transversal (v_{sx} ; v_{sy}). O modelo de três camadas proposto pelo CEB [1] fornece um mecanismo resistente para o dimensionamento desses elementos com armadura em malha ortogonal. Procedimentos para orientar o dimensionamento e o detalhamento das armaduras baseados nesse modelo são apresentados, com o estudo das capacidades das diferentes camadas, dos diferentes braços de alavanca das forças internas, do processo iterativo e de simplificações possíveis. O procedimento computacional para automatização do cálculo proposto por Lourenço & Figueiras [2] é implementado e avaliado.

Palavras-chave: concreto armado, dimensionamento, chapas, placas, cascas.ção Distribuída.

^a reinaldochen@hotmail.com, São Paulo, Brasil;

^b Escola Politécnica da USP, Departamento de Estruturas e Fundações, dbella@usp.br, São Paulo, Brasil.

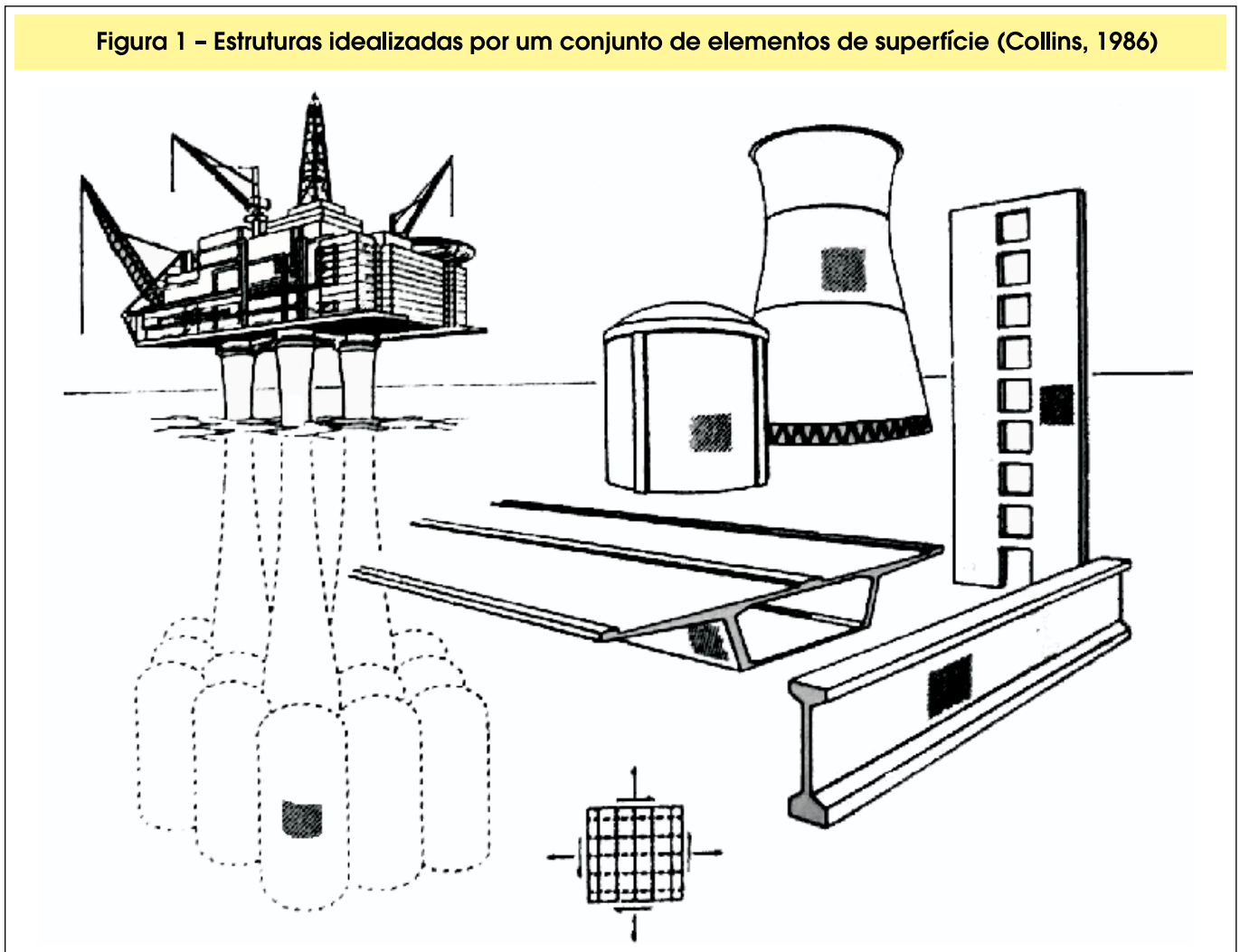
1 Introdução

Elementos de superfície são componentes básicos de muitas estruturas de concreto armado como vigas-parede, cascas, lajes e plataformas marítimas (ver figura [1]). São elementos representados por seu plano médio que possuem uma dimensão, usualmente chamada espessura, que, segundo Corrêa & Ramalho [3], não deve superar a quarta parte das demais dimensões. Conhecidos os esforços solicitantes provenientes de uma análise elástica-linear em um dado elemento, surge o problema da determinação da armadura necessária e da verificação do concreto. Nos elementos de membrana, placa e casca as direções das armaduras são, na maioria das vezes, não coincidentes com as direções das tensões principais, o que conduz ao aparecimento de fissuras oblíquas em relação a essas direções.

Soluções apresentadas para o dimensionamento de elementos de membrana submetidos a solicitações em seu próprio plano (n_{sdx} , n_{sdy} , v_{sd}) em códigos recentes como a NBR 6118 [4], ACI [5] e CEB [1] para a determinação da armadura são ainda escassas e, se não incompletas, pouco claras. O estudo de mecanismos de transferência de cargas em elementos de membrana fissurados foi realizado por diversos pesquisadores, dentre os quais se destacam Baumann, (ver[16]), Nielsen, Fialkow [6] e Gupta [7,10]. Neste trabalho, estabelecem-se procedimentos gerais para o dimensionamento de elementos de superfície armados com malha ortogonal.

Em um elemento de casca dois diferentes tipos de solicitações podem ocorrer simultaneamente: solicitações de membrana (n_{sdx} , n_{sdy} , v_{sd}) e solicitações de placa (m_{sdx} , m_{sdy} , m_{sdx}), além de solicitações de cisalhamento transversal (v_x , v_y). Como no caso de elementos de membranas, é preciso um modelo para verificação de elementos de casca e de placa fissurados com armaduras em malha ortogonal. Procedimentos para o dimensionamento ainda não são bem difundidos. A NBR-6118 [4] e o Eurocode 2 [9] não apresentam nenhuma formulação específica para o dimensionamento de elementos de casca; o CEB [1], por sua vez, sugere a utilização de um modelo de três camadas. Neste modelo, as duas camadas externas são

Figura 1 - Estruturas idealizadas por um conjunto de elementos de superfície (Collins, 1986)



submetidas a solicitações de membrana, enquanto que a camada intermediária estabelece a transferência do cisalhamento entre as camadas externas. O CEB [1] cita que um procedimento iterativo deve ser adotado para a determinação das espessuras de cada uma das três camadas e para o cálculo dos diferentes braços de alavanca das forças internas, mas não fornece orientações adicionais. O próprio CEB [1] reconhece que "... a exata determinação dos valores (...) é complexa e requer iterações, uma vez que depende da posição da armadura e da espessura das camadas de concreto".

Contribuições importantes para o tratamento do modelo para o dimensionamento de elementos de casca foram dadas por Gupta [8], Lourenço & Figueiras [2], que propuseram rotinas para o dimensionamento automático, e pelo próprio CEB [11,12] em boletim sobre modelos de dimensionamento (Estado Limite Último). Um estudo mais aprofundado do modelo de três camadas deverá ser realizado neste trabalho visando o estabelecimento de procedimentos que orientem sua aplicação.

2 Breve descrição das propriedades dos materiais

O concreto é um material complexo cuja descrição constitutiva envolve um número grande de parâmetros. Neste trabalho, no entanto, será tratado como um material rígido plástico, caracterizado por apenas um parâmetro: sua resistência efetiva à compressão.

Verificação do ELU – concreto. Deve-se observar que, sob as condições de ELU, a máxima força de compressão atuando sobre uma área de concreto não exceda um valor limite, correspondente à resultante das tensões resistentes dadas pelas equações constitutivas do material e por fatores de segurança adequados. Contudo, simplificações apropriadas dessas leis constitutivas são permitidas. Alternativamente ao diagrama parábola-retângulo de tensão-deformação, utiliza-se neste trabalho os diagramas simplificados de tensões uniformes ao longo de toda altura de uma zona sob 'compressão essencialmente uniaxial' propostos pelo CEB [1]. A tensão média em zonas não fissuradas é igual a:

$$f_{cd1} = 0,85 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) f_{cd} \quad (2.1)$$

A resistência do concreto na direção da tensão de compressão é reduzida após a fissuração devida à tensão de tração desenvolvida no concreto entre fissuras e à transmissão de tensões de compressão através de fissuras previamente formadas. Além disso, faixas de concreto entre fissuras são esbeltas e, portanto, menos resistentes à compressão. A resistência média do concreto em zonas fissuradas pode ser calculada por:

$$f_{cd2} = 0,60 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) f_{cd} \quad (2.2)$$

Para o concreto submetido compressão biaxial, a resistência é aumentada para o valor de $k \cdot f_{cd1}$ devido ao confinamento do concreto. Também de acordo com o CEB [1]:

$$k = -\frac{1 + 3,80\alpha}{(1 + \alpha)^2}, \text{ onde } \alpha = \frac{\sigma_{2f}}{\sigma_{3f}} \text{ and } \sigma_{2f} \text{ and } \sigma_{3f} \text{ são tensões principais na ruptura} \quad (2.3)$$

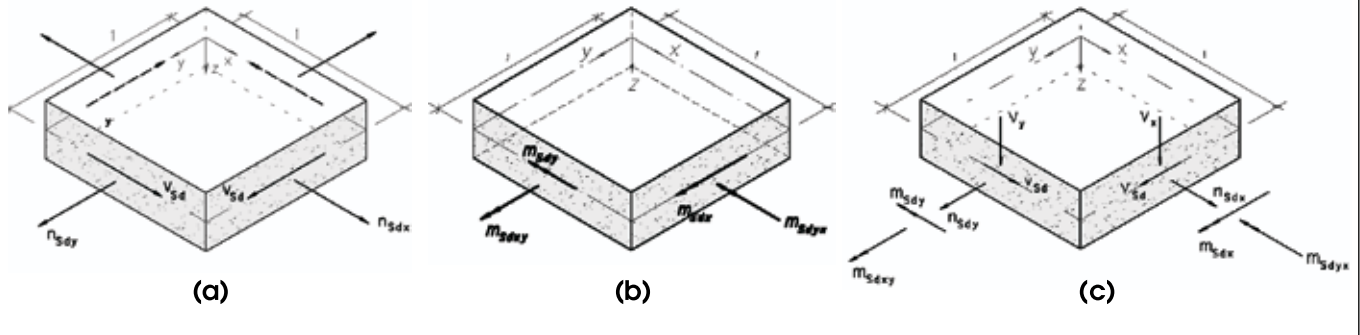
Verificação do ELU – armadura. Considera-se neste trabalho comportamento rígido-plástico para a armadura, que terá tensão de tração máxima igual à tensão de escoamento. A contribuição de armaduras à compressão é desprezada, uma vez que essa contribuição é pequena em comparação com a do concreto.

3 Dimensionamento de elementos de membrana

3.1 Dimensionamento baseado no critério de Baumann

Seja um elemento de membrana de espessura h com armadura ortogonal segundo as direções x e y localizada no seu plano médio e submetido a esforços por extensão unitária n_{Sdx} , n_{Sdy} , v_{Sd} (figura [2a]), determinados no regime elástico-linear.

Figura 2 - Esforços solicitantes em um elemento de: (a) membrana; (b) placa; (c) casca (convenção positiva)



As direções das tensões principais, 1 e 2, são não coincidentes com as direções das armaduras. Ao submeter a membrana a um estado significativo de tensão em que pelo menos uma das tensões principais é de tração, surgem fissuras paralelas, mais ou menos retilíneas e, em média, igualmente espaçadas entre si. A direção dessas fissuras é condicionada pelas armaduras existentes, sendo oblíqua em relação às direções das armaduras. Denominando θ o ângulo que a direção das fissuras faz com a direção y da armadura tem-se que, em geral, θ é diferente de zero.

Admitem-se as seguintes hipóteses: os esforços solicitantes atuantes no elemento de membrana são aproximadamente uniformemente distribuídos ao longo de diversas barras; as fissuras são paralelas e uniformemente distribuídas; as armaduras resistem apenas a cargas axiais (o efeito de pino ao longo das fissuras é desprezado); é desprezada a resistência à tração do concreto; é considerada perfeita aderência entre a armadura e o concreto.

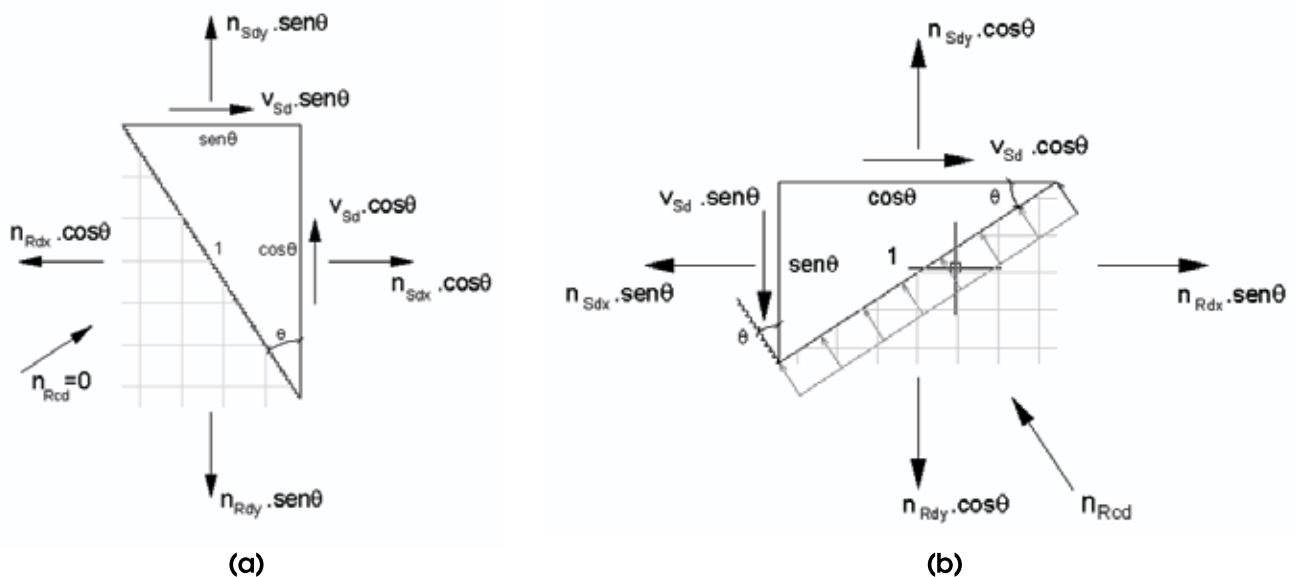
Designando por A_{sx} e A_{sy} as áreas de armadura por extensão unitária ao longo de y e x, respectivamente, obtêm-se os esforços de tração, também por extensão unitária, resistentes pelas armaduras:

$$n_{Rdx} = A_{sx} \cdot \sigma_{sx}; \quad n_{Rdy} = A_{sy} \cdot \sigma_{sy}$$

onde σ_{sx} e σ_{sy} são as tensões nas armaduras nas direções x e y, respectivamente.

Procede-se, então, ao equilíbrio de forças em um elemento de membrana adjacente a uma extensão de fissura unitária. As dimensões horizontal e vertical do elemento (catetos do triângulo retângulo), de extensão $\text{sen}\theta$ e $\text{cos}\theta$, são obtidas

Figura 3 - Equilíbrio de forças em um elemento de membrana (a) delimitado por um plano paralelo à direção da fissura e (b) com extensão unitária na direção perpendicular à fissura



diretamente a partir de relações trigonométricas em função de θ . Como não ocorre engrenamento entre os agregados, a face da fissura é livre de tensões e, assim, o equilíbrio fornece (ver figura [3a]):

$$n_{Rdx} = n_{Sdx} + v_{sd} \cdot \operatorname{tg} \theta \quad (3.1)$$

$$n_{Rdy} = n_{Sdy} + v_{sd} \cdot \operatorname{cot} g \theta \quad (3.2)$$

Em planos normais à direção das fissuras, nas regiões da membrana entre duas fissuras, estabelecem-se tensões de compressão no concreto σ_c uniformemente distribuídas. Considerando, agora, um elemento delimitado por um plano ortogonal à direção das tensões de compressão (plano ortogonal à fissura), conforme a figura 3b, e procedendo ao equilíbrio de forças na direção da força de compressão no concreto, tem-se:

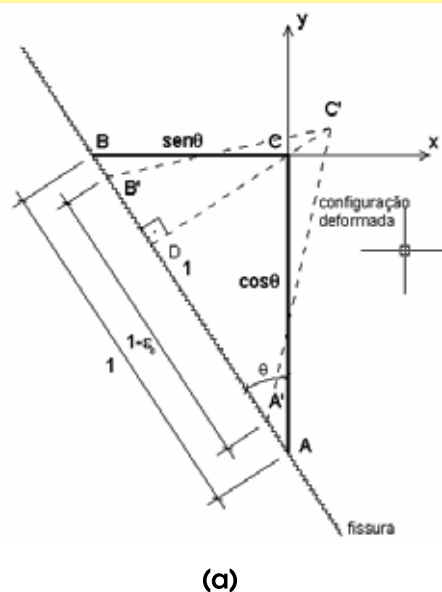
$$n_{Rcd} = v_{sd} (\operatorname{tg} \theta + \operatorname{cot} g \theta) \quad (3.3)$$

A solução do problema é obtida considerando, além das condições de equilíbrio, condições de compatibilidade de deformações das armaduras e do concreto ilustrada na figura 4:

$$DC'^2 = B'C'^2 - B'D^2 = A'C'^2 - A'D^2$$

$$(1 + \varepsilon_{sx})^2 \operatorname{sen}^2 \theta - [(1 - \varepsilon_c) \operatorname{sen}^2 \theta]^2 = (1 + \varepsilon_{sy})^2 \cos^2 \theta - [(1 - \varepsilon_c) \cos^2 \theta]^2$$

Figura 4 - Deformações em um elemento de membrana a partir de uma extensão unitária sobre a diagonal comprimida e relações geométricas para o elemento após a deformação



$$\begin{aligned} B'C' &= (1 + \varepsilon_{sx}) \operatorname{sen} \theta \\ A'C' &= (1 + \varepsilon_{sy}) \cos \theta \\ B'D &= (1 - \varepsilon_c) \operatorname{sen}^2 \theta \\ A'D &= (1 - \varepsilon_c) \cos^2 \theta \\ A'B' &= 1 - \varepsilon_c \end{aligned}$$

(b)

onde os termos do tipo ε^2 são desprezíveis perante ε pois tratam-se de termos de ordem superior. Rearranjando os termos, chega-se a:

$$\frac{\varepsilon_{sy}}{\varepsilon_{sx}} = tg^2 \theta \left[1 + \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{sx}} (1 - \cot^2 \theta) \right], \text{ onde } \varepsilon_{sx} = \frac{\sigma_{sx}}{E_s}, \varepsilon_{sy} = \frac{\sigma_{sy}}{E_s}, \varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c} = \left(\frac{d_c}{b} \right) \cdot \frac{1}{E_c} \tag{3.4}$$

$$\frac{\sigma_{sy}}{\sigma_{sx}} = tg^2 \theta \left[1 + \frac{d_c}{b E_c} \cdot \frac{A_{sx} \cdot E_s}{n_{Rdx}} \cdot (1 - \cot^2 \theta) \right]$$

Dimensionamento econômico

O dimensionamento econômico é obtido com o máximo aproveitamento das armaduras simultaneamente, isto é, com as armaduras em ambas as direções x e y submetidas a tensões iguais à tensão de escoamento do aço:

$$\sigma_{sx} = \sigma_{sy} = f_{yd}$$

Da equação (3.4), observa-se que a relação σ_{sx}/σ_{sy} assume valor unitário quando a inclinação θ das fissuras em relação à direção y tende a 45°. Assim, a consideração da inclinação da fissura a 45° leva a um dimensionamento no regime elástico onde as armaduras nas duas direções estão igualmente em escoamento e o concreto está submetido ao valor mínimo de compressão, condições essas que caracterizam a solução mais econômica. As equações (3.1) e (3.2) ficam:

$$n_{Rdx} = n_{Sdx} + v_{Sd}; \quad n_{Rdy} = n_{Sdy} + v_{Sd}$$

Quando o cisalhamento é negativo, as fissuras ocorrem de tal forma que o sentido de v_{Sd} seja oposto ao sentido de n_{Rdx} e n_{Rdy} (ver fig [5]). O equilíbrio do elemento de membrana leva, nesse caso, a:

$$n_{Rdx} = n_{Sdx} - v_{Sd}; \quad n_{Rdy} = n_{Sdy} - v_{Sd}$$

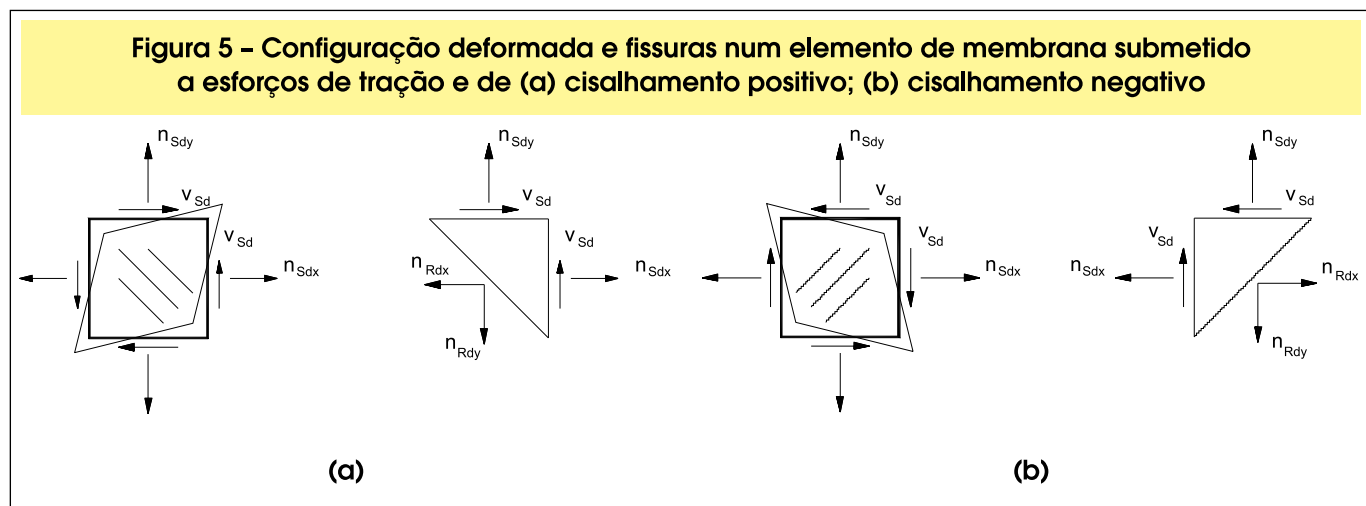
Os dois casos de carregamento expostos anteriormente podem ser agrupados considerando as expressões:

$$n_{Rdx} = n_{Sdx} + |v_{Sd}|; \quad n_{Rdy} = n_{Sdy} + |v_{Sd}| \tag{3.5}$$

A partir das equações 3.1 e 3.2, distinguem-se os seguintes casos de dimensionamento:

• Caso I

nos casos em que $n_{Rdx} > 0, n_{Rdy} > 0$; $n_{Rdx} = n_{Sdx} + |v_{Sd}|$; $n_{Rdy} = n_{Sdy} + |v_{Sd}|$



dimensionamento econômico das armaduras:

$$\text{verificação do concreto: } \frac{2v_{sd}}{b} \leq 0,6 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) f_{cd}$$

• **Caso II**

Quando a armadura na direção x é dispensada, o ângulo de inclinação das fissuras em relação ao eixo y passa a ser θ_o , diferente da condição de dimensionamento ótimo calculada como função dos esforços solicitantes:

$$n_{Rdx} < 0, n_{Rdy} > 0: \quad n_{Rdx} = 0; \quad n_{Rdy} = n_{Sdy} - \frac{|v_{sd}|^2}{n_{Sdx}}, \quad \text{com } \operatorname{tg} \theta_o = -\frac{n_{Sdx}}{|v_{sd}|}$$

$$\text{dimensionamento das armaduras: } A_{sx} = 0; \quad A_{sy} = \frac{n_{Rdy}}{f_{yd}}$$

$$\text{a força de compressão no concreto fica: } n_{Rcd} = |v_{sd}| (\operatorname{tg} \theta_o + \cot g \theta_o) = |v_{sd}| \left(-\frac{n_{Sdx}}{|v_{sd}|} - \frac{|v_{sd}|}{n_{Sdx}} \right) = -n_{Sdx} - \frac{|v_{sd}|^2}{n_{Sdx}}$$

$$\text{e, assim, a verificação do concreto deve ser feita pela equação: } \left(-n_{Sdx} - \frac{|v_{sd}|^2}{n_{Sdx}} \right) \cdot \frac{1}{b} \leq 0,6 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) f_{cd}$$

• **Caso III**

Procedendo-se de maneira análoga ao caso anterior, é possível encontrar as expressões para o dimensionamento das armaduras na direção x quando se dispensa a armadura na direção y. As equações (3.1) e (3.2) ficam:

$$n_{Rdx} > 0, n_{Rdy} < 0: \quad n_{Rdy} = 0; \quad n_{Rdx} = n_{Sdx} - \frac{|v_{sd}|^2}{n_{Sdy}}, \quad \text{com } \theta_o = \operatorname{arctg} \left(-\frac{|v_{sd}|}{n_{Sdy}} \right)$$

$$\text{dimensionamento das armaduras: } A_{sx} = \frac{n_{Rdx}}{f_{yd}}; \quad A_{sy} = 0 \quad ;$$

$$\text{verificação do concreto: } \left(-n_{Sdy} - \frac{|v_{sd}|^2}{n_{Sdy}} \right) \cdot \frac{1}{b} \leq 0,6 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) f_{cd}$$

• **Caso IV**

Quando n_{Sdx} e n_{Sdy} são esforços de compressão e é possível omitir a armadura em ambas direções, tem-se, a partir da figura [6]:

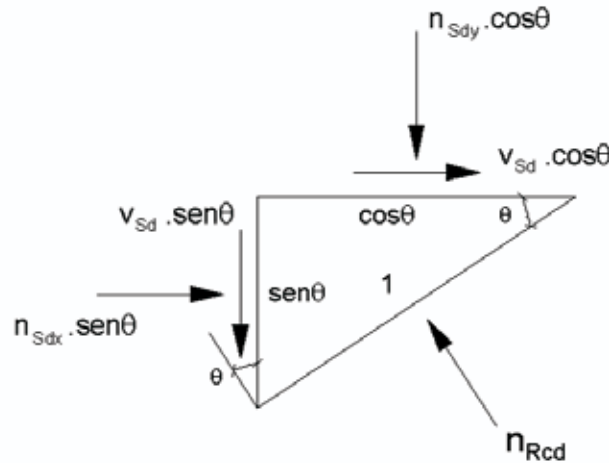
$$n_{Rcd} \cdot \operatorname{sen} \theta - n_{Sdx} \cdot \operatorname{sen} \theta = v_{sd} \cdot \cos \theta \quad (3.6)$$

$$n_{Rcd} \cdot \cos \theta - n_{Sdy} \cdot \cos \theta = v_{sd} \cdot \operatorname{sen} \theta \quad (3.7)$$

$$\text{e, de (3.6) e (3.7): } n_{Rcd} = \frac{n_{Sdx} + n_{Sdy}}{2} + \sqrt{\frac{(n_{Sdx} - n_{Sdy})^2}{4} + v_{sd}^2}$$

assim, nos casos em que $n_{Rdx} < 0, n_{Rdy} < 0$: $n_{Rdx} = 0$; $n_{Rdy} = 0$

Figura 6 - Elemento de membrana limitado por um plano ortogonal à direção das forças de compressão sem armaduras nas direções x e y



dimensionamento das armaduras: $A_{sx} = 0$; $A_{sy} = 0$

$$\text{verificação do concreto: } \left(\frac{n_{Sdx} + n_{Sdy}}{2} + \sqrt{\frac{(n_{Sdx} - n_{Sdy})^2}{4} + v_{Sd}^2} \right) \frac{1}{b} \leq f_{cd1}$$

3.2 Estudo das deformações

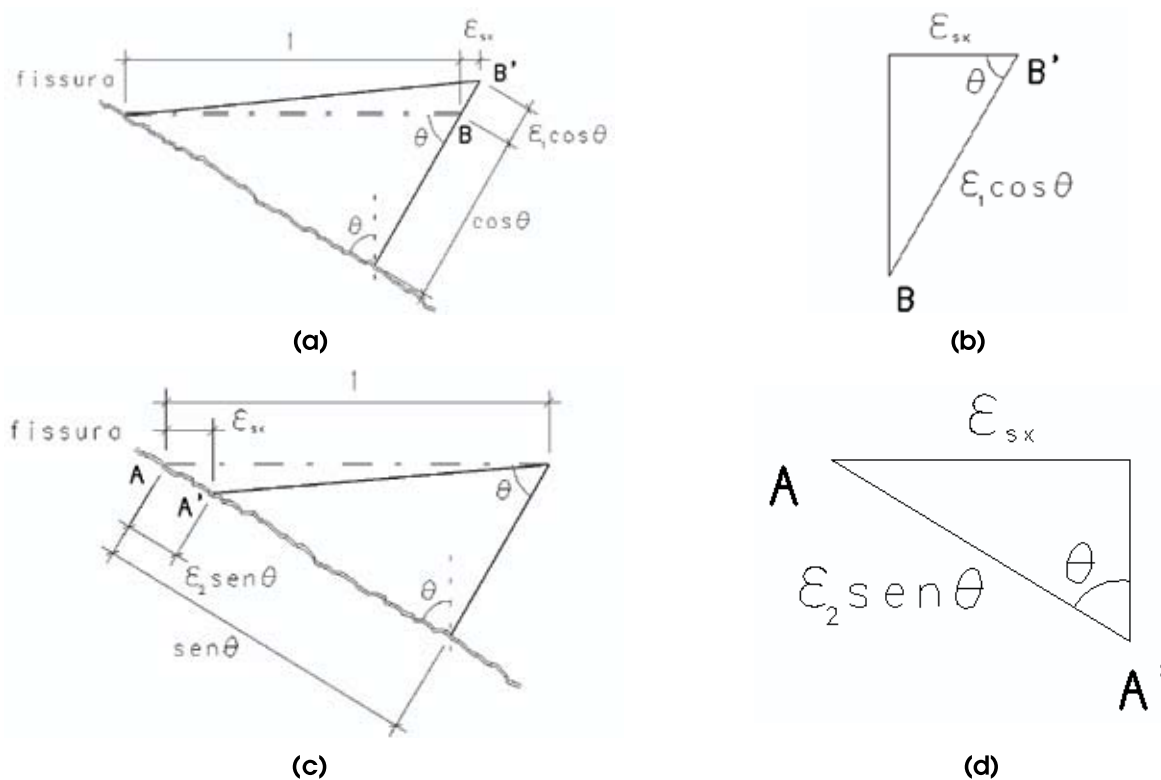
O estudo das deformações em um elemento de membrana é de especial importância porque permite uma avaliação da abertura de fissuras as quais, devidamente limitadas a valores admissíveis, garantem o não comprometimento da estrutura. Thürlimann [20] e Gupta [7] deram contribuições importantes para o cálculo das deformações que ocorrem em um elemento de membrana fissurado armado com malha ortogonal. Trata-se neste trabalho apenas das deformações elásticas devidas à ação de cargas aplicadas (esforços de tração, compressão e cisalhamento); deformações devidas à fluência, à retração plástica ou à dilatação do concreto não são consideradas.

O estudo do problema das deformações apresentado por Gupta em 1981 leva em conta a compatibilidade das deformações na membrana fissurada. Em sua formulação, admite-se que a direção das fissuras é perpendicular à direção da maior deformação principal, ϵ_1 , em qualquer estágio de carregamento. Desse modo, a direção de ϵ_1 coincide com a direção da deformação das fissuras, ϵ_f , enquanto que a direção da menor deformação principal, ϵ_2 , é paralela à direção das fissuras. Admite-se, também, que o concreto está perfeitamente aderido às armaduras. Assim sendo, as deformações sofridas pelo concreto em cada etapa de carregamento devem ser associadas a deformações idênticas nas armaduras para que haja compatibilidade de deformações. Tomando um elemento de extensão unitária na direção x, a deformação da armadura na direção x, ϵ_{sx} , será resultado da soma de duas parcelas, uma devida à deformação principal de tração e outra devida à deformação principal de compressão, conforme a figura [7].

$$\epsilon_{sx} = \epsilon_1 \cdot \cos^2 \theta + \epsilon_2 \cdot \sin^2 \theta$$

(3.8)

Figura 7 – (a) configuração deformada de um elemento de membrana submetido a deformação principal ϵ_1 ; (b) deslocamentos do ponto B; (c) configuração deformada do elemento de membrana submetido a deformação principal ϵ_2 ; (d) deslocamentos do ponto A



Tomando, agora, um elemento de extensão unitária na direção y , a deformação da armadura na direção y , ϵ_{sy} , também é calculada pela soma de duas parcelas, uma devida à deformação principal de tração e outra devida à deformação principal de compressão, conforme a figura [8].

$$\epsilon_{sy} = \epsilon_1 \cdot \text{sen}^2 \theta + \epsilon_2 \cdot \text{cos}^2 \theta$$

(3.9)

As deformações nas direções das armaduras, x e y , são dadas pelas equações (3.8) e (3.9), sendo que ϵ_1 e ϵ_2 assumem valores positivos em caso de tração e negativo na compressão. A partir dessas equações, é possível caracterizar o estado de deformação de uma membrana, tanto em condições últimas como em condições de serviço.

Estado de deformação último. Quando o estado limite último do elemento de membrana se dá pelo escoamento das armaduras, podem ocorrer dois modos distintos de ruptura: escoamento simultâneo das armaduras nas direções x e y ou escoamento da armadura em apenas uma das direções. Quando n_{Rdx} e n_{Rdy} resultarem positivos, as deformações ϵ_{sx} e ϵ_{sy} serão positivas. O dimensionamento ótimo acontece para as duas armaduras escoando, isto é, $\epsilon_{sx} \geq \epsilon_y$ e $\epsilon_{sy} \geq \epsilon_x$, sendo ϵ_y a deformação de escoamento do aço. Para valores de θ entre 0° e 45° , $\epsilon_{sx} \geq \epsilon_{sy}$. Impondo $\epsilon_{sy} = \epsilon_y$, a armadura na direção x estará escoando e a equação (3.9) resulta:

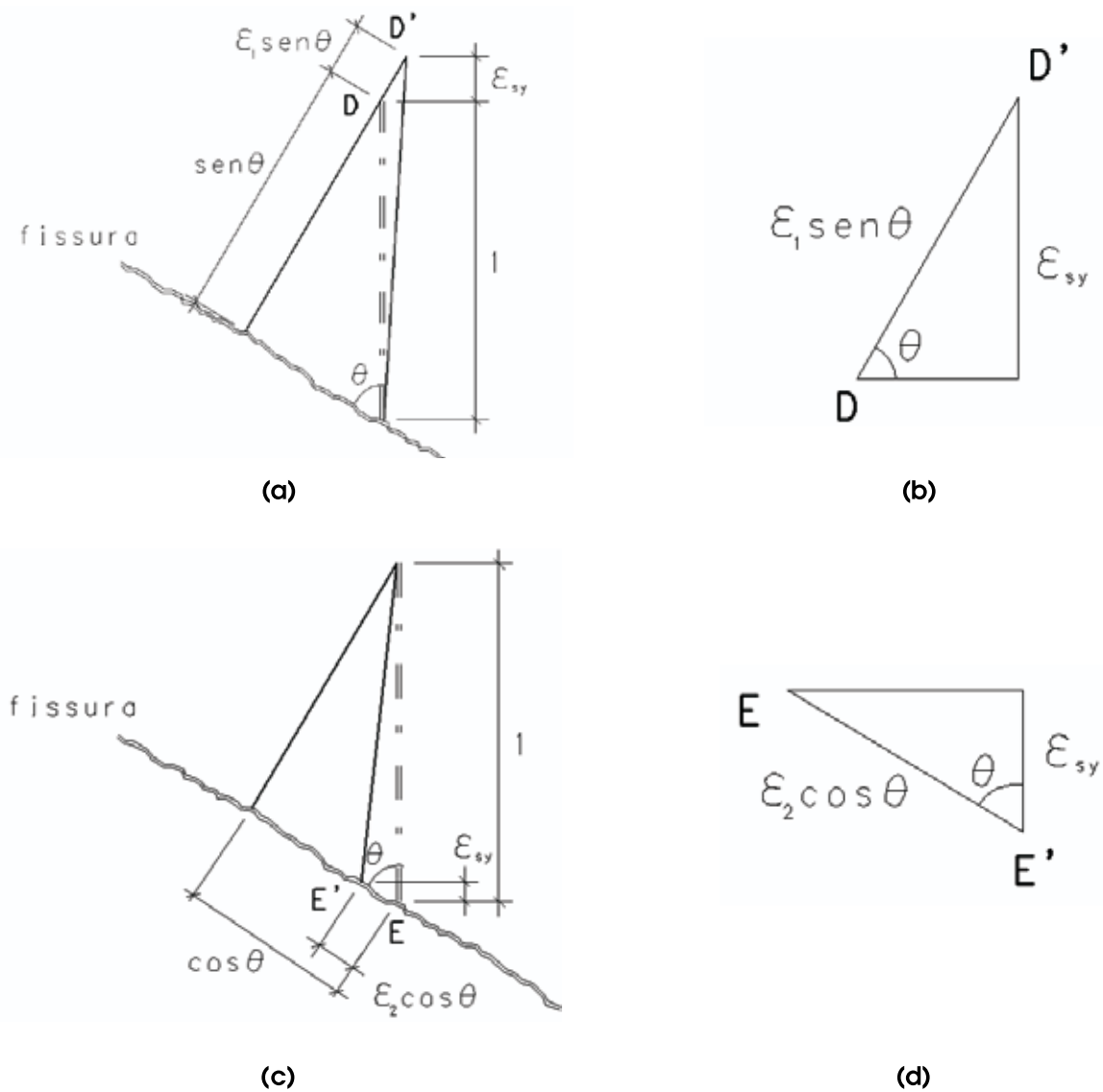
$$\epsilon_y = \epsilon_1 \cdot \text{sen}^2 \theta + \epsilon_2 \cdot \text{cos}^2 \theta ; \frac{\epsilon_1}{\epsilon_y} = \frac{1 + r \cdot \text{cos}^2 \theta}{\text{sen}^2 \theta}, \text{ com } r = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_y}$$

(3.10)

Para valores de θ entre 45° e 90° , $\epsilon_{sy} \geq \epsilon_{sx}$. Impondo $\epsilon_{sx} = \epsilon_y$, a armadura na direção y estará escoando e a equação (3.8) resulta:

$$\epsilon_y = \epsilon_1 \cdot \cos^2 \theta + \epsilon_2 \cdot \sin^2 \theta ; \frac{\epsilon_1}{\epsilon_y} = \frac{1 + r \cdot \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}, \text{ com } r = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_y} \quad (3.11)$$

Figura 8 - Configuração deformada de um elemento de membrana submetido a deformação principal ϵ_1 ; (b) deslocamentos do ponto D; (c) configuração deformada do elemento de membrana submetido a deformação principal ϵ_2 ; (d) deslocamentos do ponto E



Quando n_{Rdy} é nulo,

$$tg\theta = -\frac{|v_{sd}|}{n_{sdy}} \quad (3.12)$$

Admitindo a armadura na direção x escoando com $\varepsilon_{sx} = \varepsilon_y$ e substituindo em (3.8), tem-se:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_y} = \frac{1 + r \cdot \text{sen}^2\theta}{\text{cos}^2\theta}$$

que é a mesma expressão dada em (3.11), com a diferença de agora ser válida para qualquer valor de θ dado pela expressão (3.12). Analogamente, quando n_{Rdx} é nulo,

$$tg\theta = -\frac{n_{sdx}}{|v_{sd}|} \quad (3.13)$$

Admitindo a armadura na direção y escoando com $\varepsilon_{sy} = \varepsilon_y$ e substituindo em (3.9), tem-se:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_y} = \frac{1 + r \cdot \text{cos}^2\theta}{\text{sen}^2\theta}$$

que é a mesma expressão dada em (3.11), com a diferença de ser válida para qualquer valor de θ dado pela expressão (3.13). Estado de deformação em serviço. Em serviço, o concreto da membrana deverá estar fissurado e a armadura nas duas direções com comportamento elástico. As deformações nas armaduras nas direções x e y são dadas por:

$$\varepsilon_{sx} = \frac{n_{Rx}}{A_{sx}E_s} = \frac{n_{sx} + v_s \cdot tg\theta}{A_{sx}E_s}; \varepsilon_{sy} = \frac{n_{Ry}}{A_{sy}E_s} = \frac{n_{sy} + v_s \cdot \cot g\theta}{A_{sy}E_s} \quad (3.14)$$

e a deformação principal de compressão no concreto por:

$$\varepsilon_2 = \frac{n_{Rc}}{bE_c} = \frac{v_s \cdot (tg\theta + \cot g\theta)}{bE_c} \quad (3.15)$$

As deformações se relacionam pelas expressões:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_{sx} + \varepsilon_{sy} \quad (3.16)$$

As equações 3.14 a 3.16, juntamente com a equação 3.8, levam a:

$$\rho_y(1 + \alpha \cdot \rho_x)tg^4\theta + q_x \cdot \rho_y tg^3\theta - q_y \cdot \rho_x tg\theta - \rho_x(1 + \alpha \rho_y) = 0 \quad (3.17)$$

onde $\rho_x = \frac{A_{sx}}{b}$; $\rho_y = \frac{A_{sy}}{b}$; $q_x = \frac{n_{sx}}{v_s}$; $q_y = \frac{n_{sy}}{v_s}$; $\alpha = \frac{E_s}{E_c}$.

Conhecido o valor de θ , as deformações nas armaduras e no concreto podem ser determinadas pelas equações (3.14) e (3.15). Nota-se que aumentando os valores de n_{sx} , n_{sy} e v_s proporcionalmente, o valor de θ se mantém inalterado enquanto as armaduras estiverem em regime elástico (Gupta [10]).

3.3 Estudo da fissuração

No caso de o controle da fissuração ser realizado através da limitação da abertura estimada das fissuras, é necessário avaliar o valor de suas aberturas a partir do estado de deformação e, conseqüentemente, de tensão das armaduras na peça estudada em serviço. Na maioria dos casos de dimensionamento de elementos de membrana a direção das armaduras desvia-se da direção das tensões principais de tração e as fissuras formadas são oblíquas à armadura. Nesse caso, o espaçamento entre fissuras e as deformações de tração do concreto fissurado são diferentes se comparado com o comportamento de elementos submetidos à tração uniaxial. Determinadas as deformações nas armaduras, apresentam-se três propostas para a aplicação de expressões encontradas nas normas.

- i) dimensionar as armaduras A_{sx} e A_{sy} conforme procedimento descrito anteriormente;
- ii) determinar a combinação de carregamento em serviço para a qual será verificada a abertura de fissuras: n_{sx} , n_{sy} , v_s ;
- iii) determinar a direção da fissura correspondente à combinação de carregamento analisada a partir da equação (3.17)

$$\rho_y(1 + \alpha \cdot \rho_x)tg^4\theta + q_x \cdot \rho_y tg^3\theta - q_y \cdot \rho_x tg\theta - \rho_x(1 + \alpha \rho_y) = 0$$

- iv) com θ , determinar as forças nas armaduras e as respectivas deformações. Atenta-se para o fato de que as armaduras estão em regime elástico.

$$n_{rx} = n_{sx} + v_s tg\theta, \quad n_{ry} = n_{sy} + v_s \cot g\theta; \quad \epsilon_{sx}, \quad \epsilon_{sy}$$

Determinar também a deformação na direção da tensão principal ϵ_1 :

$$\epsilon_2 = \frac{v_s \cdot (tg\theta + \cot g\theta)}{bE_c}, \quad \epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon_{sx} + \epsilon_{sy}$$

- v) determinar o espaçamento máximo entre fissuras para as direções x e y e para a direção ortogonal à fissura. Pode ser calculado por (CEB, 1990) (Eurocode 2, 1999):

$$s_{\theta, \max} = \frac{1}{\frac{\text{sen}\theta}{s_{x, \max}} + \frac{\text{cos}\theta}{s_{y, \max}}}, \quad \text{com } s_{x, \max} = \frac{\phi_{sx}}{3,6\rho_{sx, \text{ef}}} \leq \frac{\sigma_{sx} \cdot \phi_{sx}}{3,6 \cdot f_{ct}}; \quad s_{y, \max} = \frac{\phi_{sy}}{3,6\rho_{sy, \text{ef}}} \leq \frac{\sigma_{sy} \cdot \phi_{sy}}{3,6 \cdot f_{ct}}$$

onde $\sigma_{x, \max}$ e $\sigma_{y, \max}$ são o espaçamento entre fissuras calculado nas direções x e y, respectivamente; s_{\max} é o máximo espaçamento entre fissuras (mm); ϕ_s é o diâmetro da barra; $\rho_{s, \text{ef}} = A_s/A_{c, \text{ef}}$; $A_{c, \text{ef}}$ é a área efetiva de tração ($A_{c, \text{ef}}$ é, geralmente, a área de concreto envolvendo a armadura tracionada em uma profundidade ($h_{c, \text{ef}}$) igual a 2,5 vezes a distância entre a face tracionada da seção ao centro de gravidade das armaduras); $f_{ct, \text{ef}}$ é o valor médio da resistência à tração do concreto efetivo no instante em que deve ocorrer as fissuras ($f_{ct, \text{ef}} = f_{ctm}$)

- vi) determinar a abertura de fissuras através de uma das três formulações seguintes. A primeira delas é calcular a abertura de fissuras ignorando as deformações elásticas no concreto entre elas. Essa formulação é a favor da segurança à medida que leva a aberturas maiores do que aquelas que efetivamente ocorrem. Outras duas propostas levam em conta a influência do concreto entre fissuras ("tension-stiffening"): calcular a abertura de fissuras a partir da expressão dada no Eurocode 2 (1999) ou a partir da expressão da NBR-6118 (2003) para cálculo da abertura de fissuras em elementos lineares de forma adaptada.

- a) O CEB (1990) define a abertura de fissuras característica, w_k dada por:

$$w_k = s_{\theta, \max} \cdot \epsilon_1$$

- b) O Eurocode 2 (1999) considera o cálculo de abertura de fissuras a partir do espaçamento entre elas:

$$w_k = s_{\theta, \max} \cdot (\epsilon_{sm} - s_{cm}) \tag{3.18}$$

onde $\sigma_{\theta, \max}$ é o máximo espaçamento entre fissuras, ε_{sm} é a deformação média na armadura, levando em conta os efeitos do "tension-stiffening", ε_{cm} é a deformação média no concreto entre fissuras. O valor de $(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm})$ pode ser calculado pela expressão:

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \varepsilon_1 - \frac{0,4 \frac{f_{ct,ef}}{\rho_{s,ef}} (1 + \alpha_e \rho_{s,ef})}{E_s} \geq 0,6 \frac{\sigma_s}{E_s} \quad (3.19)$$

onde α_e é a razão E_s/E_c . A taxa de armadura ρ na direção da tensão principal em um elemento com armadura em duas direções ortogonais x e y e com taxas geométricas ρ_x e ρ_y , pode ser calculada pela seguinte expressão, conforme CEB [11]:

$$\rho_{s,ef} = \rho_{sx,ef} \cos^2 \theta + \rho_{sy,ef} \sin^2 \theta \quad (3.20)$$

c) Segundo a NBR-6118 [4], a grandeza da abertura de fissuras w em peças lineares determinada para cada parte da região de envolvimento, é dada pela menor dentre aquelas obtidas pelas duas expressões que seguem:

$$w \leq \frac{\phi_i}{(20\eta_i - 7,5)} \frac{\sigma_{si}}{E_{si}} \frac{3\sigma_{si}}{f_{ct,m}}; \quad w \leq \frac{\phi_i}{(20\eta_i - 7,5)} \frac{\sigma_{si}}{E_{si}} \left(\frac{4}{\rho_{ri}} + 45 \right)$$

Alternativamente, propõe-se a análise das expressões anteriores como o produto do espaçamento entre fissuras pela deformação na direção principal de tração:

$$w \leq \frac{\phi_i}{(20\eta_i - 7,5)} \frac{\sigma_{si}}{E_{si}} \frac{3\sigma_{si}}{f_{ct,m}} = \left[\frac{\phi_i}{(20\eta_i - 7,5)} \frac{3\sigma_{si}}{f_{ct,m}} \right] \varepsilon_1 = s_{\max}^* \varepsilon_1$$

$$w \leq \frac{\phi_i}{(20\eta_i - 7,5)} \frac{\sigma_{si}}{E_{si}} \left(\frac{4}{\rho_{ri}} + 45 \right) = \left[\frac{\phi_i}{(20\eta_i - 7,5)} \left(\frac{4}{\rho_{ri}} + 45 \right) \right] \varepsilon_1 = s_{\max}^* \varepsilon_1$$

e, a partir daí, o cálculo da abertura de fissuras pela expressão

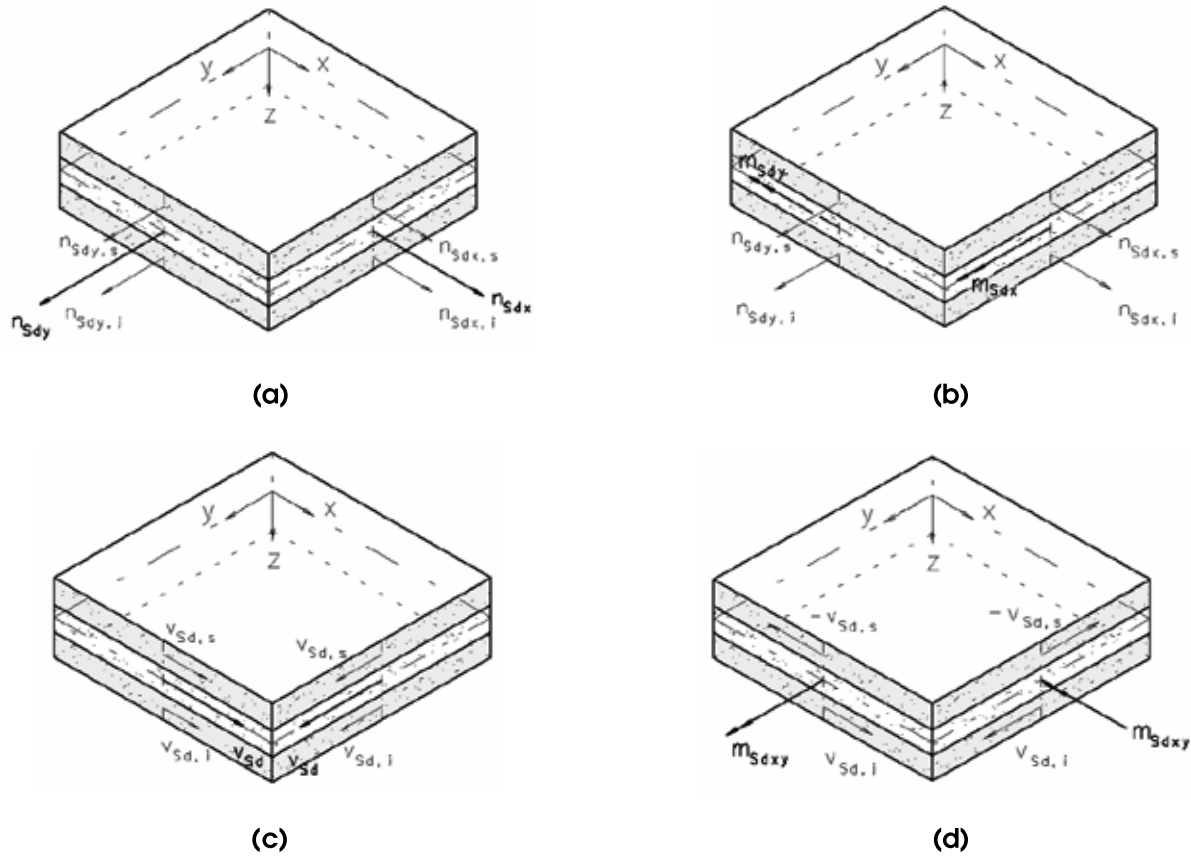
$$w_k = s_{\theta, \max}^* \varepsilon_1, \text{ com}$$

$$s_{x, \max}^* = \frac{\phi_{xi}}{(20\eta_{xi} - 7,5)} \frac{3\sigma_{sxi}}{f_{ct,m}} \leq \frac{\phi_{xi}}{(20\eta_{xi} - 7,5)} \left(\frac{4}{\rho_{rx}} + 45 \right);$$

$$s_{y, \max}^* = \frac{\phi_{yi}}{(20\eta_{yi} - 7,5)} \frac{3\sigma_{syi}}{f_{ct,m}} \leq \frac{\phi_{yi}}{(20\eta_{yi} - 7,5)} \left(\frac{4}{\rho_{ry}} + 45 \right);$$

$$s_{\theta, \max}^* = \frac{1}{\frac{\sin \theta}{s_{x, \max}^*} + \frac{\cos \theta}{s_{y, \max}^*}}$$

Figura 9 - (a) forças normais e (b) momentos fletores atuantes na casca decompostos em esforços sollicitantes de membrana atuantes nas camadas externas; (c) forças tangenciais e (d) momentos torçores atuantes na casca decompostos em esforços sollicitantes de membrana atuantes nas camadas externas



$$w_k = s_{\theta, \max}^* \cdot \epsilon_1, \text{ com } s_{x, \max}^* = \frac{\phi_{xi}}{(20\eta_{xi} - 7,5)} \frac{3\sigma_{sxi}}{f_{ct,m}} \leq \frac{\phi_{xi}}{(20\eta_{xi} - 7,5)} \left(\frac{4}{\rho_{rxi}} + 45 \right);$$

$$s_{y, \max}^* = \frac{\phi_{yi}}{(20\eta_{yi} - 7,5)} \frac{3\sigma_{syi}}{f_{ct,m}} \leq \frac{\phi_{yi}}{(20\eta_{yi} - 7,5)} \left(\frac{4}{\rho_{ryi}} + 45 \right);$$

$$s_{\theta, \max}^* = \frac{1}{\frac{\text{sen}\theta}{s_{x, \max}^*} + \frac{\text{cos}\theta}{s_{y, \max}^*}}$$

4 Dimensionamento de elementos de casca

4.1 Definição do mecanismo resistente

Elementos de casca são submetidos a sollicitações combinadas de membrana e de placa. Considere um elemento de casca infinitesimal de dimensões dx e dy unitárias e paralelas às direções x e y (figura 2c). No caso mais genérico, distinguem-se oito componentes de forças internas, que representam as resultantes das tensões sollicitantes no elemento:

- 3 componentes de membrana: n_{Sdx}, n_{Sdy}, v_{Sd} ;
- 3 componentes de placa: $m_{Sdx}, m_{Sdy}, m_{Sdxy} = m_{Sdxy}$;
- 2 forças transversais de cisalhamento: v_x, v_y .

Essas componentes estão também ilustradas na figura 2c em convenção positiva. As direções ortogonais x e y estão no plano médio da casca, enquanto que a direção z é perpendicular a esse mesmo plano.

Conforme o modelo de três camadas proposto pelo CEB [1], o elemento de casca é assimilado à superposição de três camadas que respondem por diferentes funções: as duas camadas externas resistem a solicitações normais de membrana decorrentes das componentes normais n_{Sdx} e n_{Sdy} (ver figura 9a) e das componentes de flexão m_{Sdx} e m_{Sdy} (ver figura 9b) e resistem também a solicitações tangenciais de membrana decorrentes da componente tangencial v_{Sd} (ver figura 9c) e da componente de torção m_{Sdxy} (ver figura 9d); a camada intermediária, por sua vez, deve resistir às forças cortantes v_x e v_y que atuam perpendicularmente ao plano médio do elemento. Admite-se que cada camada possui espessura uniforme, a saber, a camada superior t_s , a inferior t_i e a intermediária t_c tais que:

$$t_s + t_c + t_i = h \quad (4.1)$$

As forças de membrana por unidade de extensão nas direções paralelas às armaduras ortogonais nas camadas superior (referidas pelo índice ',s') e inferior (referidas pelo índice ',i') são calculadas por:

$$n_{Sdx,s} = n_{Sdx} \frac{z_x - y_{x,s}}{z_x} - \frac{m_{Sdx}}{z_x}; \quad n_{Sdx,i} = n_{Sdx} \frac{z_x - y_{x,i}}{z_x} + \frac{m_{Sdx}}{z_x} \quad (4.2)$$

$$n_{Sdy,s} = n_{Sdy} \frac{z_y - y_{y,s}}{z_y} - \frac{m_{Sdy}}{z_y}; \quad n_{Sdy,i} = n_{Sdy} \frac{z_y - y_{y,i}}{z_y} + \frac{m_{Sdy}}{z_y} \quad (4.3)$$

$$v_{Sd,s} = v_{Sd} \frac{z_{xy} - y_{xy,s}}{z_{xy}} - \frac{m_{Sdxy}}{z_{xy}}; \quad v_{Sd,i} = v_{Sd} \frac{z_{xy} - y_{xy,i}}{z_{xy}} + \frac{m_{Sdxy}}{z_{xy}} \quad (4.4)$$

Figura 10 - Distâncias dos centros de gravidade das armaduras nas direções x e y

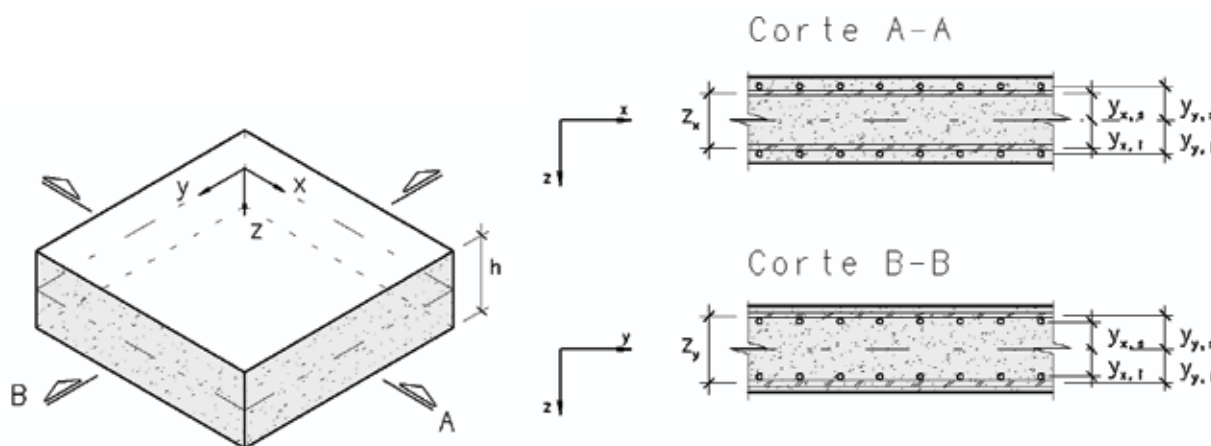
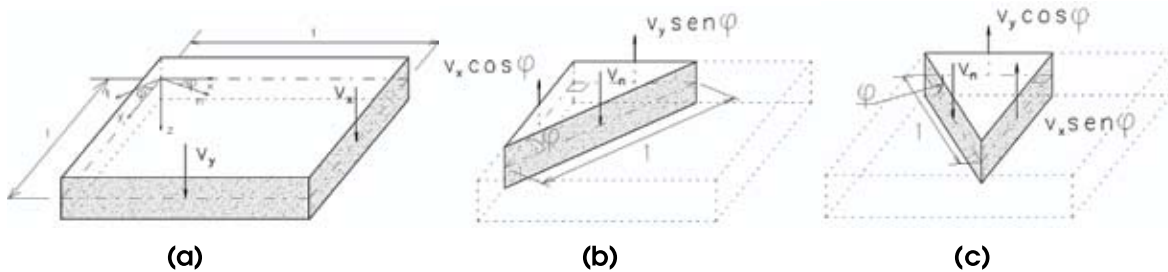


Figura 11 - (a) componentes dos esforços de cisalhamento na camada intermediária de um elemento de casca; equilíbrio para determinação de (b) v_n e (c) v_t ;



onde, conforme a figura 10, z_x e z_y são braços de alavanca referentes aos momentos fletores e às forças normais de membrana; z_{xy} é o braço de alavanca referente aos momentos torçores e às forças de cisalhamento; $y_{x,s}$, $y_{x,i}$, $y_{y,s}$, $y_{y,i}$ são distâncias entre plano médio da camada e o centro de gravidade da armadura nas direções x e y para absorção dos momentos fletores e das forças normais de membrana tais que $z_x = y_{x,s} + y_{x,i}$ e $z_y = y_{y,s} + y_{y,i}$; $y_{xy,s}$, $y_{xy,i}$ são distâncias entre plano médio da camada e o centro de gravidade da armadura nas direções x e y para absorção dos momentos torçores e das forças de cisalhamento tais que $z_{xy} = y_{xy,s} + y_{xy,i}$. Nenhum braço de alavanca deve ser maior que a distância entre os centros de gravidade das armaduras de faces opostas. A partir da redução dos esforços de casca é possível dimensionar as armaduras e verificar o concreto das camadas superior e inferior conforme os critérios existentes para membranas. No entanto, a definição da espessura das diferentes camadas deve ser feita através de um processo iterativo.

4.2 Dimensionamento das camadas externas

As camadas externas podem ser dimensionadas conforme os critérios explicitados no item "Dimensionamento baseado no critério de Baumann".

4.3 Dimensionamento da camada intermediária

A camada intermediária deve transmitir esforços de cisalhamento. Analisa-se, a seguir, o comportamento de um elemento da camada intermediária de extensão unitária na direção dos eixos x e y e espessura t_c solicitado pelas cortantes v_x e v_y (por extensão unitária) conforme a figura 11. Apesar da espessura da camada intermediária ser t_c , admite-se que os esforços de cisalhamento atuam ao longo da extensão do braço de alavanca z_c .

Considerando uma rotação arbitrária dos eixos cartesianos em torno do eixo z caracterizada pelo ângulo φ , tem-se os eixos n e t, ortogonais entre si. O equilíbrio das forças verticais nos elementos de extensão unitária na direção n (figura 11b) e t (figura 11c) fornece as equações de transformação das componentes da força de cisalhamento transversal:

$$v_n = v_x \cos\varphi + v_y \sin\varphi; \quad v_t = -v_x \sin\varphi + v_y \cos\varphi$$

A soma dos quadrados das equações anteriores independe de φ :

$$v_n^2 + v_t^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_o^2 \tag{4.5}$$

Em particular, para $v_n = v_o$ obtém-se $\varphi = \varphi_0$ e $v_t = 0$. Define-se, nesse caso, a direção de cisalhamento principal, identificado pelo ângulo φ_0 dado pela expressão:

$$\text{tg } \varphi_0 = \frac{v_y}{v_x} \tag{4.6}$$

Assim, o esforço de cisalhamento principal e sua direção de atuação podem ser determinados a partir dos valores de v_x e v_y . A seguir, distinguem-se duas possíveis maneiras de transferência das forças de cisalhamento:

a) caso de dispensa da armadura de cisalhamento

Na prática do dimensionamento de lajes, geralmente procura-se limitar as tensões nominais de cisalhamento atuantes em seções críticas bem definidas de forma a dispensar a adoção de armaduras de cisalhamento. Nesse caso, deve-se verificar:

$$v_0 \leq \frac{V_{Rd1}}{b} \quad (4.7)$$

O CEB (1990) permite a utilização da seguinte expressão no cálculo da resistência ao cisalhamento transversal V_{Rd1} para elementos de banzos paralelos e resistência do concreto inferior a 50MPa:

$$V_{Rd1} = 0,12\xi(100\rho f_{ck})^{1/3} b_{red}d \quad (4.8)$$

onde $\xi = 1 + \sqrt{200/d}$, com d , altura útil do elemento, em mm; b_{red} é a largura reduzida da seção de dimensionamento, igual à largura total menos a soma das larguras dos cabos de protensão alojados na seção; ρ é a taxa de armadura aderente de tração na flexão na direção principal que se estende por uma distância, no mínimo, igual a d além da seção considerada, exceto em apoios de extremidade onde a extensão pode ser considerada adequada se o comprimento da barra além do eixo do apoio é maior que 12 vezes o diâmetro. Para um elemento com armadura em duas direções ortogonais x e y com taxas geométricas ρ_x e ρ_y , conforme indicado na figura 4.10, a taxa de armadura ρ na direção principal deve ser calculada pela expressão:

$$\rho = \rho_x \cos^2 \vartheta + \rho_y \sin^2 \vartheta; \quad \rho_x = \frac{A_{sx}}{b_x d}; \quad \rho_y = \frac{A_{sy}}{b_y d} \quad (4.9)$$

b) caso em que armadura de cisalhamento é necessária

Quando não se verifica a equação (4.7), o mecanismo resistente deve ser análogo ao de uma viga, localmente orientada de acordo com a direção de cisalhamento principal. A resultante do campo de compressão diagonal, $v_0/\sin\vartheta$, forma um ângulo ϑ com o plano xy , e é resultado da composição duas componentes: $v_0 \cot\vartheta$ pertencente a um plano paralelo a xy , e v_0 , pertencente a um plano paralelo a t_z . Admitindo a utilização armadura de suspensão vertical, devem ser verificadas as seguintes equações:

- força de compressão diagonal no concreto:

$$F_{scw} = \frac{v_0}{\sin\vartheta} \leq F_{rcw} = f_{cd2} z_c \cos\vartheta \quad (4.10)$$

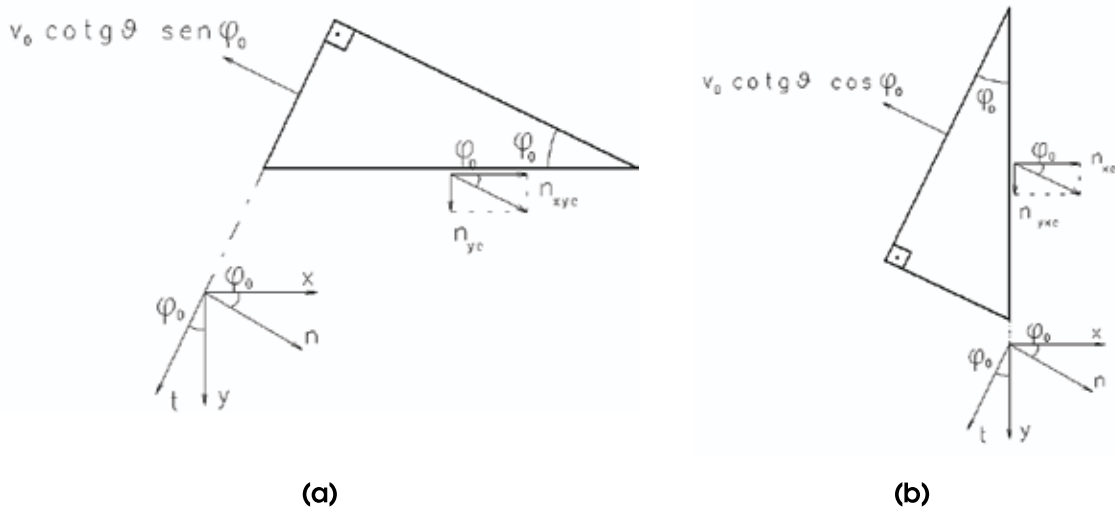
- força de tração nos estribos:

$$F_{stw} = v_0 \leq F_{rtw} = \frac{A_{sw} f_{ywd}}{s} z_c \cot g\vartheta \quad (4.11)$$

- força axial de treliça adicional nos banzos tracionados e comprimidos (camadas externas do modelo):

$$\Delta F = \Delta F_s + \Delta F_i = v_0 \cdot \cot g\vartheta \quad (4.12)$$

Figura 12 - Forças devidas ao cisalhamento principal em elemento com extensão unitária (a) na direção x; (b) na direção y



O ângulo Φ é sujeito às mesmas limitações aplicadas a elementos lineares sujeitos a força cortante. Segundo a NBR-6118 [4], particularmente, ele pode ser arbitrado livremente no intervalo $30^\circ \leq \Phi \leq 45^\circ$. A escolha de ϑ deve ser baseada, entre outros critérios, em considerações práticas relativas ao detalhamento. Um valor baixo de ϑ leva a maiores espaçamentos entre as armaduras transversais, além de facilitar a concretagem, mas exige maior quantidade de armadura longitudinal.

A força longitudinal da treliça $v_o \cot g \vartheta$ (equação 4.12), que atua num elemento de extensão unitária na direção de n na camada intermediária, será equilibrada pelas camadas externas do modelo de três camadas. O acréscimo de forças nas camadas superior e inferior equivale ao procedimento de decalagem do diagrama de momentos fletores em vigas. A seguir, calculam-se as componentes dessa força para elementos de extensão unitária segundo as direções x e y para que elas possam, posteriormente, ser divididas entre as camadas superior e inferior.

Considera-se inicialmente um prisma obtido de um elemento de casca delimitado por um plano paralelo ao eixo x e dois outros planos: um ortogonal e outro paralelo à direção do cisalhamento principal (figura 12a). Impõem-se as condições de equilíbrio nesse elemento, de extensão unitária ao longo de x , para a determinação de n_{yc} e n_{xyc} , que são as forças atuantes na extensão unitária na direção x .

$$n_{yc} = v_o \cot g \vartheta \cdot \text{sen}^2 \varphi_o = v_o \cot g \vartheta \cdot \frac{\text{tg}^2 \varphi_o}{1 + \text{tg}^2 \varphi_o} = v_o \cot g \vartheta \cdot \frac{v_y^2}{v_x^2 + v_y^2} = \frac{v_y^2}{v_o} \cot g \vartheta$$

$$n_{xyc} = v_o \cot g \vartheta \cdot \text{sen} \varphi_o \cdot \cos \varphi_o = v_o \cot g \vartheta \cdot \frac{\text{tg} \varphi_o}{1 + \text{tg}^2 \varphi_o} = v_o \cot g \vartheta \cdot \frac{v_x v_y}{v_x^2 + v_y^2} = \frac{v_x v_y}{v_o} \cot g \vartheta$$

Considera-se, agora, um prisma obtido de um elemento de casca delimitado por um plano paralelo ao eixo y e dois outros planos: um ortogonal e outro paralelo à direção do cisalhamento principal (figura 12b). Procedendo de maneira análoga ao caso anterior, obtém-se:

$$n_{xc} = \frac{v_x^2}{v_o} \cot g \vartheta; \quad n_{jxc} = n_{xyc} = \frac{v_x v_y}{v_o} \cot g \vartheta$$

Convém notar que n_{xc} , n_{yc} e n_{xyc} representam as contribuições globais devidas ao mecanismo de treliça que ainda precisarão ser subdivididas entre as camadas superior e inferior.

4.4 Dimensionamento das espessuras das diferentes camadas

Para simplificar o dimensionamento, opta-se pela referência ao plano médio das armaduras nas direções x e y e admite-se que a espessura das camadas externas é igual ao dobro da distância entre o plano médio das armaduras nas direções x e y e a face externa do elemento. Conseqüentemente, ignora-se a distinção entre $y_{x,s}$ e $y_{y,s}$ e entre $y_{x,i}$ e $y_{y,i}$:

$$y_{xs} = y_{ys} = y_{ns}; \quad y_{xi} = y_{yi} = y_{ni}; \quad y_{xys} = y_{yxs} = y_{ts}; \quad y_{xyi} = y_{yxi} = y_{ti}$$

$$z_x = z_y = z_n = y_{ns} + y_{ni}; \quad z_{xy} = z_t = y_{ts} + y_{ti}$$

e as forças internas atuando nas camadas externas resultam:

• quando a armadura de cisalhamento transversal devido ao efeito de v_x e v_y é dispensada:

$$n_{sdx,s} = n_{sdx} \frac{z - y_s}{z} - \frac{m_{sdx}}{z}; \quad n_{sdx,i} = n_{sdx} \frac{z - y_i}{z} + \frac{m_{sdx}}{z}; \quad n_{sdy,s} = n_{sdy} \frac{z - y_s}{z} - \frac{m_{sdy}}{z}$$

$$n_{sdy,i} = n_{sdy} \frac{z - y_i}{z} + \frac{m_{sdy}}{z}; \quad v_{sd,s} = v_{sd} \frac{z - y_s}{z} - \frac{m_{sdcy}}{z}; \quad v_{sd,i} = v_{sd} \frac{z - y_i}{z} + \frac{m_{sdcy}}{z}$$

• quando a armadura de cisalhamento transversal devido ao efeito de v_x e v_y é necessária:

$$n_{sdx,s} = n_{sdx} \frac{z - y_s}{z} - \frac{m_{sdx}}{z} + \frac{v_x^2}{v_o} \cot g \vartheta \frac{z - y_s}{z}; \quad n_{sdx,i} = n_{sdx} \frac{z - y_i}{z} + \frac{m_{sdx}}{z} + \frac{v_x^2}{v_o} \cot g \vartheta \frac{z - y_i}{z} \quad (4.13)$$

$$n_{sdy,s} = n_{sdy} \frac{z - y_s}{z} - \frac{m_{sdy}}{z} + \frac{v_y^2}{v_o} \cot g \vartheta \frac{z - y_s}{z}; \quad n_{sdy,i} = n_{sdy} \frac{z - y_i}{z} + \frac{m_{sdy}}{z} + \frac{v_y^2}{v_o} \cot g \vartheta \frac{z - y_i}{z} \quad (4.14)$$

$$v_{sd,s} = v_{sd} \frac{z - y_s}{z} - \frac{m_{sdcy}}{z} + \frac{v_x v_y}{v_o} \cot g \vartheta \frac{z - y_s}{z}; \quad v_{sd,i} = v_{sd} \frac{z - y_i}{z} + \frac{m_{sdcy}}{z} + \frac{v_x v_y}{v_o} \cot g \vartheta \frac{z - y_i}{z} \quad (4.15)$$

As terceiras parcelas das equações 4.13 a 4.15 equivalem à decalagem dos esforços solicitantes.

Se a espessura das camadas externas adotada for tal que a resistência do concreto não é satisfeita, pode-se adotar um dos seguintes procedimentos:

• aumentar a espessura da camada, aceitando uma redução do braço de alavanca e, conseqüentemente, um aumento da área total de armadura a ser detalhada;

• aumentar a espessura da camada e manter inalterada a posição da armadura que, assim, se torna excêntrica em relação à camada. Isto significa que o total de armadura fornecido deve ser mudado para o restabelecimento das condições de equilíbrio. A avaliação dessa mudança pode ser feita com o auxílio do mecanismo descrito a seguir, que considera o modelo com todas as três camadas (figura 13a). Essa avaliação deve ser feita para cada direção de armadura.

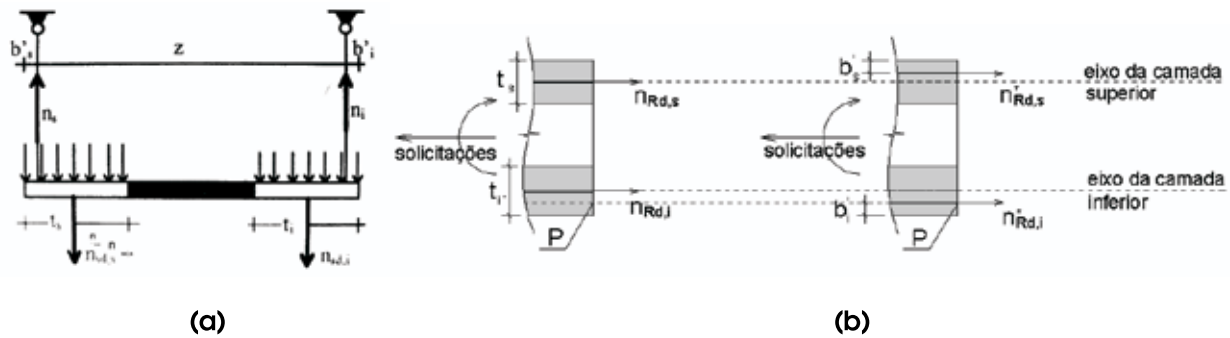
Para armaduras posicionadas no eixo das camadas externas (figura 13b), os esforços resistidos pelas armaduras $n_{rd,s}$ e $n_{rd,i}$ são tais que geram um momento em relação ao ponto P:

$$M_P = n_{rd,s} \left(h - \frac{t_s}{2} - b'_i \right) + n_{rd,i} \left(\frac{t_i}{2} - b'_i \right)$$

Fixando a posição das armaduras a uma distância de b'_s e b'_i a partir, respectivamente, das bordas superior e inferior (figura 13c), as novas forças resistentes pelas armaduras geram o seguinte momento, também em relação ao ponto P:

$$M_P = n_{rd,s}^* (b - b'_s - b'_i)$$

Figura 13 - Equilíbrio em um elemento de casca: (a) com armaduras no eixo das camadas externas; (b) com armaduras excêntricas



Igualando as duas expressões, obtêm-se as novas forças atuantes nas armaduras:

$$n_{Rd,s}^* = \frac{n_{Rd,s} \left(h - \frac{t_s}{2} - b'_i \right) + n_{Rd,i} \left(\frac{t_i}{2} - b'_i \right)}{h - b_s - b_i}; \quad n_{Rd,i}^* = n_{Rd,s} + n_{Rd,i} - n_{Rd,s}^* \quad (4.16)$$

A camada intermediária deve ser verificada para uma força de cisalhamento transversal adicional correspondente à força transferida entre os dois níveis de armadura. Além disso, a verificação do cisalhamento na camada intermediária deverá ser refeita para valor corrigido de z_c .

4.5 Dimensionamento automático

Lourenço & Figueiras [2] criaram uma ferramenta de apoio ao projeto importante ao automatizarem os diversos casos de dimensionamento em um programa computacional. A sub-rotina "Shell.bas", juntamente com outra sub-rotina para dimensionamento de elementos de membrana ("Membrane.bas") desenvolvidas por Lourenço & Figueiras foi adaptada pelos autores em um programa em linguagem Visual Basic e implementada numa planilha Microsoft Excel para avaliação e testes. Diferentemente do procedimento manual simplificado, tem-se que as resultantes de compressão e tração numa mesma camada não estão necessariamente no mesmo nível, mas o equilíbrio global do elemento é garantido em cada iteração.

5 Dimensionamento de elementos de placa

Os principais métodos de dimensionamento de elementos de placa são o método de Wood [19], baseado na verificação de momentos normais, e o método baseado no equilíbrio de forças, proposto por Brondum-Nielsen [13], desenvolvido e adotado pelo CEB[1]. Em trabalho realizado por Parsekian [21] é estudado em maior profundidade o método de Wood, e a influência da consideração do momento volvente no dimensionamento de lajes de concreto.

5.1 Equações do método de Wood

Dentre os métodos de dimensionamento de elementos de placas de concreto armado com malha de armadura ortogonal que levam em conta momentos fletores m_{sx} e m_{sy} e momentos torçores m_{sxy} provenientes de uma análise estrutural elástica o mais conhecido é o de Wood [19]. O seu método de dimensionamento, que é baseado no critério do momento de escoamento normal, fornece bons resultados para elementos levemente armados.

O método consiste em determinar a quantidade de armadura mínima para que em uma seção qualquer a componente normal do momento último desenvolvido resulte sempre maior ou igual à componente normal solicitante. O momento resistente normal último m_{Rn} atuando na direção n ao longo da linha de escoamento é encontrado por considerações de equilíbrio em um elemento infinitesimal na direção do eixo n , dados os momentos resistentes últimos nas direções das armaduras m_{Rx} e m_{Ry} , por extensão unitária:

$$m_{Rn} = m_{Rxx} \cos^2 \theta + m_{Ryy} \sin^2 \theta \quad (5.1)$$

A partir do equilíbrio podem ser obtidos os momentos solicitantes segundo a direção n:

$$m_{Sn} = m_{Sxx} \cos^2 \theta + m_{Syy} \sin^2 \theta - m_{Sxy} \sin 2\theta \quad (5.2)$$

A condição de escoamento fica então estabelecida quando o momento normal solicitante torna-se igual ao momento resistente último, ou seja: $m_{Sn} = m_{Rn}$

As equações desse método são obtidas pela minimização da diferença entre a componente normal do momento resistente último e a componente normal do momento solicitante e pela minimização da quantidade de armadura a ser utilizada. Fornecem os momentos resistentes últimos nas direções das barras de armadura para dimensionamento de flexão simples. Os efeitos de membrana na placa e a interação entre as forças que atuam nas armaduras situadas em faces opostas da laje não são considerados.

Momentos de dimensionamento da armadura positiva

Nesse caso, deve-se ter $m_{Rn} - m_{Sn} \geq 0$

e os momentos resistentes para o dimensionamento das armaduras positivas são:

$$m_{Rxx,i} = m_{Sxx} + |m_{Sxy}|; \quad m_{Ryy,i} = m_{Syy} + |m_{Sxy}|$$

Momentos de dimensionamento da armadura negativa

Nesse caso, deve-se ter $m_{Rn} \leq m_{Sn}$

e o arranjo de armadura mais econômico é obtido quando:

$$m_{Rxx,s} = m_{Sxx} - |m_{Sxy}|; \quad m_{Ryy,s} = m_{Syy} - |m_{Sxy}| \quad (5.3)$$

Momentos de dimensionamento das armaduras positivas ou negativas de sinais contrários

Quando se utilizam as equações acima, espera-se que os momentos de dimensionamento sejam positivos e negativos, respectivamente. Entretanto, em alguns casos, estas equações conduzem a momentos de dimensionamento com sinais contrários, ou seja, pode-se encontrar para a armadura positiva momentos negativos e vice-versa. Isto se deve ao fato de o critério de escoamento de Johansen não considerar a possibilidade de os momentos resistentes últimos terem sinais contrários. Nesses casos, deve-se seguir o procedimento:

Correção para a borda inferior da placa, associada à armadura positiva

i) se $m_{Rxx,i} < 0$, adota-se $m_{Rxx,i} = 0$, e tem-se: $m_{Ryy,i} = m_{Syy} + \frac{|m_{Sxy}|^2}{m_{Sxx}}$

Se nesta equação o valor de $m_{Ryy,i}$ resultar negativo as armaduras são dispensadas.

ii) se $m_{Ryy,i} < 0$, adota-se $m_{Ryy,i} = 0$, e tem-se: $m_{Rxx,i} = m_{Sxx} + \frac{|m_{Sxy}|^2}{m_{Syy}}$

Se nesta equação o valor de $m_{Rxx,i}$ resultar negativo, as armaduras são dispensadas.

Correção para a borda superior da placa, associada à armadura negativa

i) se $m_{R_{x,s}} > 0$, adota-se $m_{R_{x,s}} = 0$, e tem-se: $m_{R_{y,s}} = m_{S_y} - \left| \frac{m_{S_{xy}}^2}{m_{S_x}} \right|$

Se nesta equação o valor de $m_{R_{y,s}}$ resultar positivo, as armaduras são dispensadas.

ii) se $m_{R_{y,s}} > 0$, adota-se $m_{R_{y,s}} = 0$, e tem-se: $m_{R_{x,s}} = m_{S_x} - \left| \frac{m_{S_{xy}}^2}{m_{S_y}} \right|$

Se nesta equação o valor de $m_{R_{x,s}}$ resultar positivo, as armaduras são dispensadas.

5.2 Modelo de três camadas

As equações propostas por Wood resultam em valores cada vez menos conservativos à medida que aumenta a porcentagem de armadura e que aumenta o ângulo entre as direções principais de momentos atuantes e as direções das armaduras. Gupta demonstrou que as expressões de Wood são aproximadas porque não levam em conta a influência dos diferentes braços de alavanca das forças internas. Marti [17] mostrou que o critério do momento de escoamento normal superestima a resistência de elementos de laje que são submetidos a momentos torçores significativos nas direções das armaduras dispostas ortogonalmente. Com isso, a necessidade de um novo modelo de cálculo para elementos de placa ficou evidenciada.

O modelo de três camadas proposto pelo CEB [1] para o dimensionamento de elementos de placa surgiu como alternativa ao dimensionamento de Wood. É uma particularização do modelo para dimensionamento de elementos de casca. As forças atuantes nas camadas superior e inferior do modelo de três camadas proposto são dadas pelas expressões:

$$n_{S_{dx,s}} = -\frac{m_{S_{dx}}}{z_x} + \frac{v_x^2}{v_o} \cot g \vartheta \frac{z_x - y_{x,s}}{z_x}; \quad n_{S_{dx,i}} = \frac{m_{S_{dx}}}{z_x} + \frac{v_x^2}{v_o} \cot g \vartheta \frac{z_x - y_{x,i}}{z_x} \tag{5.4}$$

$$n_{S_{dy,s}} = -\frac{m_{S_{dy}}}{z_y} + \frac{v_y^2}{v_o} \cot g \vartheta \frac{z_y - y_{y,s}}{z_y}; \quad n_{S_{dy,i}} = \frac{m_{S_{dy}}}{z_y} + \frac{v_y^2}{v_o} \cot g \vartheta \frac{z_y - y_{y,i}}{z_y} \tag{5.5}$$

$$v_{S_{d,s}} = -\frac{m_{S_{dxy}}}{z_{xy}} + \frac{v_x v_y}{v_o} \cot g \vartheta \frac{z_{xy} - y_{xy,s}}{z_{xy}}; \quad v_{S_{d,i}} = \frac{m_{S_{dxy}}}{z_{xy}} + \frac{v_x v_y}{v_o} \cot g \vartheta \frac{z_{xy} - y_{xy,i}}{z_{xy}} \tag{5.6}$$

As camadas externas devem ser verificadas como membranas submetidas a carregamentos no plano, definidos em termos de forças por unidade de extensão $n_{S_{dx}}$, $n_{S_{dy}}$ e v_{S_d} .

6 Exemplos de aplicação

6.1 Dimensionamento de um elemento de membrana

É realizado o dimensionamento de um elemento de membrana para armadura em malha ortogonal (direções m e n). Os esforços solicitantes são esforços principais $n_{S_{dx}}=219,9$ kN/m e $n_{S_{dy}}=119,1$ kN/m. A espessura do elemento é de 0,10m e o $f_{ck}=20$ MPa. Diversos casos de dimensionamento são realizados, para situações em que as direções das armaduras se desviam das direções dos esforços principais (armadura segundo direção m faz um ângulo α em relação ao eixo x). As armaduras necessárias a_{sm} , a_{sn} e $a_{s,total}$ são plotadas em função do ângulo α das armaduras na figura 14.

Figura 14 - Armadura total necessária para elemento de membrana com armaduras em malha ortogonal para diferentes inclinações da armadura (α)

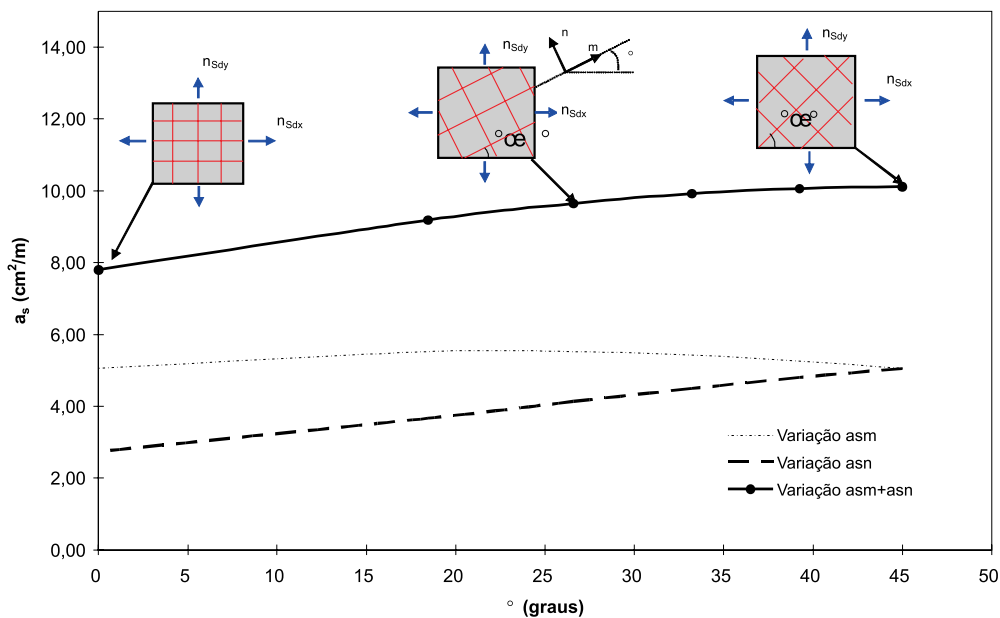


Figura 15 - Estimativa da abertura de fissuras em elemento de membrana realizada pelo método de Gupta, Eurocode e adaptação da NBR-6118

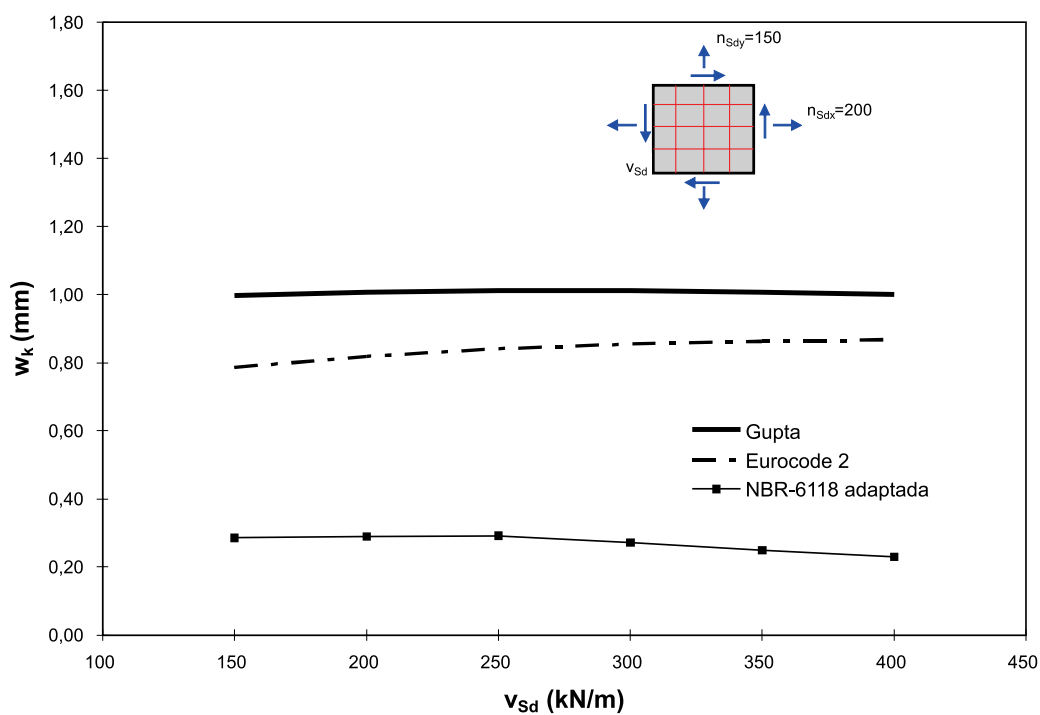
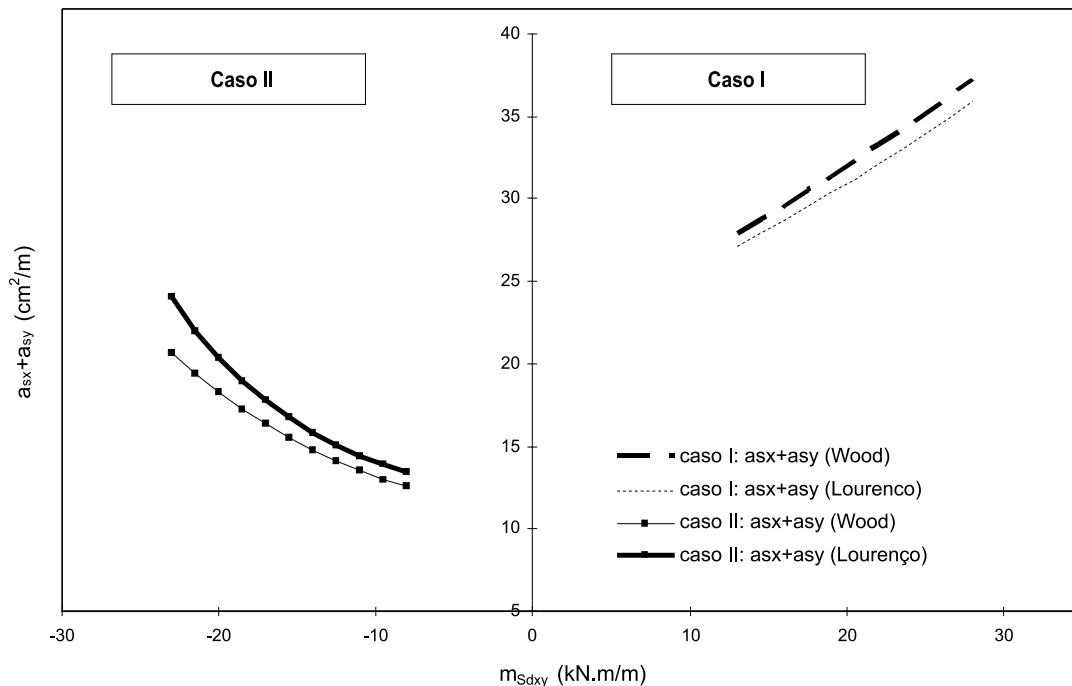


Figura 16 - Armadura total necessária para dois casos de dimensionamento: caso I momentos fletores positivos; caso II campo de momentos positivos e negativos



6.2 Avaliação da abertura de fissuras em elemento de membrana

Um elemento de membrana de espessura 0,10m e concreto $f_{ck}=20\text{MPa}$ é submetido a esforços normais $n_{Sdx}=200\text{ kN/m}$, $n_{Sdy}=150\text{ kN/m}$ e esforços de cisalhamento que variam de 150 a 400 kN/m. A armadura é dimensionada e a abertura de fissuras é calculada pelos três métodos propostos, admitindo que o elemento foi detalhado com armaduras $\phi 10\text{mm}$. A variação da abertura de fissuras para valores de v_{Sd} crescentes é ilustrada na figura 15.

6.3 Dimensionamento de um elemento de placa

Caso I: um elemento de placa de espessura 0,15m e concreto $f_{ck}=25\text{MPa}$ é submetido a $m_{Sdx}=50\text{ kN.m/m}$, $m_{Sdy}=45\text{ kN.m/m}$ e m_{Sdxy} variando de 13 a 28 kN.m/m (momentos fletores positivos em ambas as direções).

Caso II: um elemento de placa de espessura 0,15m e concreto $f_{ck}=25\text{MPa}$ é submetido a $m_{Sdx}=25\text{ kN.m/m}$, $m_{Sdy}=-31\text{ kN.m/m}$ e m_{Sdxy} variando de -8 a -23 kN.m/m (campo de momentos positivos e negativos).

Admite-se, em ambos os casos, $d'=0,03\text{m}$. Foi realizado o dimensionamento pelo método de Wood e pela rotina computacional de Lourenço. As armaduras totais necessárias ($a_{sx} + a_{sy}$) são plotadas em função do momento torçor atuante na figura 16.

7 Resultados e discussões

O exemplo 6.1 confirma um resultado já esperado. O dimensionamento econômico de elementos de membrana ocorre quando se dispõe armaduras segundo as direções dos esforços principais. A quantidade de armadura total necessária aumenta à medida em que aumenta o desvio das mesmas em relação aos esforços principais.

As expressões para cálculo de abertura de fissuras foram aplicadas no exemplo numérico 6.2. Para os seis casos estudados, a abertura de fissuras com a consideração do "tension-stiffening" reduziu, em média, 17% o valor esperado caso nenhuma contribuição do concreto entre fissuras fosse admitida. O cálculo da abertura de fissuras com a aplicação das formulações constantes na NBR-6118 [4] adaptadas levou a resultados ainda menos conservadores.

No exemplo 6.3, caso I, observa-se que o elemento de placa dimensionado para momentos positivos através da rotina de Lourenço & Figueiras resultou em menores quantidades de armadura (em média 3%), mostrando-se mais econômico. Isso

ocorreu porque a rotina, ao ter identificado compressão biaxial na camada superior, considerou um valor da resistência à compressão majorado, conforme 2.3. Já no caso II, a armadura necessária segundo o método de Lourenço resultou tanto maior quanto maiores eram os momentos torçores. Tal diferença pode ser explicada pela adoção de f_{cd2} e pela consideração mais precisa dos diferentes braços de alavanca das forças internas no dimensionamento de Lourenço.

8 Conclusões

As seguintes conclusões podem ser feitas:

- a formulação para o dimensionamento de elementos de membrana baseada no critério de Baumann fornece soluções que respeitam equilíbrio e condições de compatibilidade e são adequadas para verificação em ELU;
- a formulação adaptada da NBR-6118 [4] para cálculo de abertura de fissuras é menos rigorosa que a formulação apresentada pelo Eurocode 2 [9] ;
- o dimensionamento iterativo manual é bastante simplificado se se admitir valores de y iguais para armaduras ortogonais em uma mesma camada e braços de alavanca entre as forças internas iguais para forças normais, tangenciais e forças devidas ao cisalhamento transversal ($z=z_c=z_n=z_t$). Procedendo assim, no entanto, deve-se atentar para a necessidade de, em casos particulares, estabelecer o equilíbrio da armadura excêntrica em relação às camadas externas. De um modo geral, a solução final é obtida em poucas iterações.
- o dimensionamento automático de Lourenço é uma ferramenta de apoio adequada para o projeto de estruturas de concreto. As soluções são mais econômicas, já que as espessuras das camadas externas são sempre determinadas para solicitações de compressão limites, o que leva a maiores braços de alavanca para as forças internas. No entanto, verificações adicionais devem ser feitas quanto à decalagem e ao dimensionamento quanto ao cisalhamento transversal;
- o dimensionamento de elementos de placa pelo método de Wood [9], bem como pelo método simplificado para placas que dele decorre, fornece resistência adequada para elementos levemente armados. As equações desses métodos resultam em resistências cada vez menos conservativas à medida que aumentam as taxas de armaduras ou os ângulos entre a direção das armaduras e a direção dos momentos principais.

9 Referências bibliográficas

- [01] Comité Euro-International du Béton. CEB-FIP Model Code 1990. London, Thomas Telford, 1993.
- [02] LOURENÇO, P. B.; FIGUEIRAS, J. A. Automatic Design of Reinforcement in Concrete Plates and Shells. *Engineering Computations*. v. 10, 1993, p. 519-541.
- [03] CORRÊA, M. R. S.; RAMALHO M.A. Análise de Estruturas de Concreto, Simpósio EPUSP Sobre Estruturas de Concreto, 3, São Paulo, 1993. Anais... São Paulo, 1993, p. 151-172.
- [04] ABNT. Norma Brasileira NBR-6118: Projeto de estruturas de concreto. Rio de Janeiro, 2003.
- [05] ACI Committee 318. Building Code Requirements for Structural Concrete. American Concrete Institute, Detroit, 1999.
- [06] FIALKOW, M.N. Strength Design of Shell Membrane Reinforcement. *Journal of Structural Engineering*, v. 109, n. 4, 1983, p. 891-908.
- [07] GUPTA, A. K. Membrane Reinforcement in Shells. *Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, v.107, January, 1981, p. 41-56.
- [08] GUPTA, A. K. Combined Membrane and Flexural Reinforcement in Plates and Shells. *Journal of Structural Engineering*, v. 112, n. 3, March, 1985. p. 550-557.
- [09] Comité Européen de Normalisation. Eurocode2: Design of concrete structures. Brussels, 1999.
- [10] GUPTA, Ajaya K. Cracking in Reinforced Concrete Analysis, *Journal of Structural Engineering*, v. 110, n. 8, 1984, p. 1735-1746.
- [11] Comité Euro-International du Béton. Bulletin d'Information, n.223: A state-of-art report. Ultimate Limit State Design of Structural Concrete Shell Elements. June, 1995.
- [12] Comité Euro-International du Béton. Bulletin d'Information, n.223: A state-of-art report. Ultimate Limit State Design of R.C. and P.C. Slabs. June, 1995.
- [13] BRØNDUM-NIELSEN, T. Optimization of Reinforcement in Shells, Folded Plates, Walls and Slabs, *ACI Structural Journal*. May-June, 1985, p.304-309.
- [14] COLLINS, M.P.; MITCHELL, D. *Prestressed Concrete Basics*. Ottawa, Canadian Prestressed Concrete Institute, 1987, 614 p.
- [15] DELLA BELLA, J. C.; CIFÚ, S. Critérios para dimensionamento das armaduras e verificação do concreto em estruturas laminares submetidas a solicitações de chapa e placa. In: Simpósio EPUSP Sobre Estruturas de Concreto, 4, São Paulo, 2000. Anais... São Paulo, 2000.
- [16] LEONHARDT, F.; MÖNNING, E. *Construções de concreto v. 2*. Rio de Janeiro, Editora Interciência, 1978,161 p.

- [17] MARTI, P. Design of Concrete Slabs for Transverse Shear ACI Structural Journal. March-April 1990, Title n.87-S19.
- [18] MARTI, P. Kong, K. Response of Reinforced Concrete Slab Elements to Torsion. Journal of Structural Engineering, v. 113,n. 5, May, 1987, p. 976-993.
- [19] WOOD, R. H. The reinforcement of slabs in accordance with a pre-determined field of moments. London, Concrete, v. 2, n.2, February 1968, p. 69-76.
- [20] Comité Euro-International du Béton. Bulletin d'Information, n.126: Shear and Torsion. Shear strength of reinforced and prestressed concrete beams. Abril, 1976.
- [21] PARSEKIAN, G. A.; CORREA, M. R. S.. "Cálculo e armação de lajes de concreto armado com a consideração do momento volvente". Cadernos de Engenharia de Estruturas. EESC-USP. S. Carlos, 1998, 24 p.
- [22] CHEN, R. "Dimensionamento de elementos de superfície de concreto armado: membranas, placas e cascas". Dissertação de mestrado. POLI-USP. S. Paulo, 2004, 127 p.