

Finite Element Model for Segmental Structures

Modelo de Elementos Finitos para o Estudo de Estruturas Segmentadas



ALINE DA SILVA RIBEIRO^a
aribeiro@ppgec.ufrgs.br

AMÉRICO CAMPOS FILHO^b
americo@ufrgs.br

ALEXANDRE RODRIGUES PACHECO^c
apacheco@ufrgs.br

Abstract

When bridge construction is considered, the application of externally post-tensioned segmental members is a very attractive solution, especially when compared to more classical construction methods. The use of this solution results in smaller precast elements tied together by post-tensioned tendons, upbrining such advantages as fast and versatile construction, high quality control and lower overall cost. In this paper, a formulation based on the Finite Element Method is discussed. This formulation is used to numerically simulate the structural behavior of members composed of externally post-tensioned segments. These analyses not only allow serviceability limit states verifications when sections are fully compressed, but also allow verifications of ultimate limit states when joint openings and load transfers at the joints are considered. Additionally, to evaluate the accuracy of the numerical results of the computational model a comparison to experimental data from the literature is performed.

Keywords: Finite Element Method, Segmental Construction, Bridges, External Prestressing.

Resumo

Aduelas protendidas externamente, utilizadas em pontes, contrastam com as clássicas construções monolíticas, consistindo de "pequenos" segmentos pré-moldados protendidos por cordoalhas externas. Há muitas vantagens na utilização deste tipo de composição, como rapidez e versatilidade na construção, alto controle de qualidade e economia. No presente trabalho, discute-se uma formulação, baseada no método dos elementos finitos, para simular o comportamento de estruturas compostas por aduelas externamente protendidas. Esta formulação permite tanto a análise de situações de serviço, onde as seções permanecem completamente comprimidas, como também de situações últimas, onde se considera a abertura das juntas e a transferência de esforços através das mesmas. Para verificar a adequação do modelo computacional, compararam-se resultados numéricos com valores experimentais disponíveis na literatura.

Palavras-chave: Elementos finitos, Construções segmentadas, Pontes, Protensão externa.

^a Universidade Federal do Rio Grande do Sul, PPGE, aribeiro@ppgec.ufrgs.br, Av. Osvaldo Aranha, 99 - 3º andar, Porto Alegre, Brazil;

^b Universidade Federal do Rio Grande do Sul, PPGE, americo@ufrgs.br, Av. Osvaldo Aranha, 99 - 3º andar, Porto Alegre, Brazil;

^c Universidade Federal do Rio Grande do Sul, PPGE, apacheco@ufrgs.br, Av. Osvaldo Aranha, 99 - 3º andar, Porto Alegre, Brazil.

1 Introdução

Muitas vezes a solução para o projeto de uma ponte é definida pelo método construtivo que será utilizado para a execução da mesma. A escolha do método construtivo é influenciada por diversos fatores como o vão, o custo, a disponibilidade de equipamentos e o prazo para a execução da obra. Entre os diversos métodos construtivos disponíveis, a construção segmentada para pontes em concreto protendido, conhecida por método dos balanços sucessivos, tem sido largamente utilizada em diversos pa-

íses. Esse processo consiste na construção em segmentos, denominados de aduelas, que vão constituindo balanços que avançam sobre o obstáculo a ser vencido. As aduelas pré-moldadas são transportadas por meio de treliças metálicas até a extremidade do balanço, onde são protendidas longitudinalmente, conforme a figura 1.

As principais vantagens do uso de aduelas pré-fabricadas são o rígido controle de qualidade das peças, a redução do canteiro de obras, a rapidez de execução, o perfeito acabamento obtido pelo uso de fôrmas metálicas ou de concreto e o uso de mão-de-obra especializada. O tama-

Figura 1 - Esquema para lançamento de aduela pré-moldada (1)

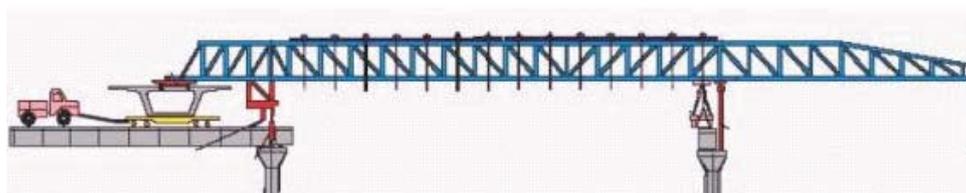


Figura 2 - Cabos protendidos externamente (2)

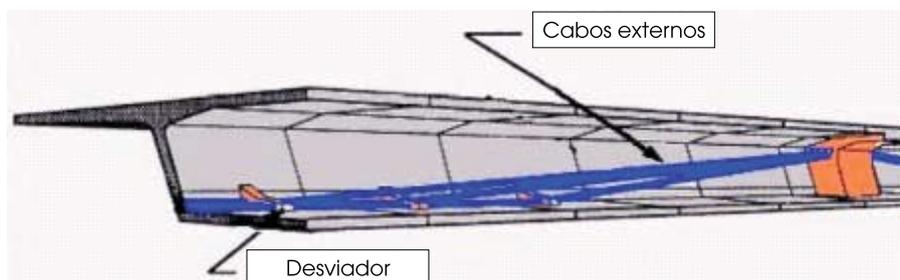


Figura 3 - (a) Ponte Bang Na Expressway em Bangkok (b) Transporte de aduelas (3)



(a)



(b)

Figura 4 - Abertura de junta (2)

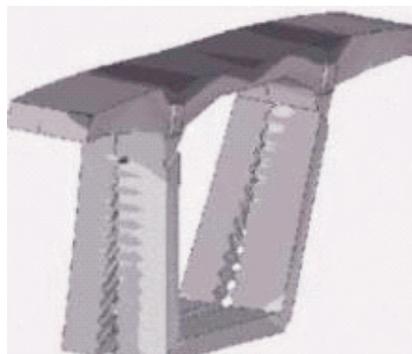
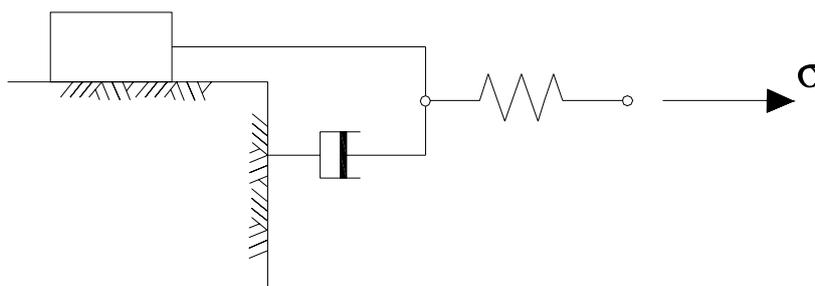


Figura 5 - Modelo elasto-viscoplástico



no das aduelas depende das condições de transporte e da facilidade de sua fabricação.

Recentemente, por ser mais vantajoso em relação à tradicional protensão com cabos internos, tem crescido de maneira muito rápida o interesse pela protensão externa com cabos não aderentes. Neste sistema, os cabos ficam localizados dentro da aduela e são conectados ao concreto somente através de desviadores e da ancoragem. Os cabos são envolvidos por uma bainha de polietileno e cobertos por uma pasta de cimento (graute) para proteção contra corrosão (figura 2).

A ponte Bang Na Expressway em Bangkok, na Tailândia, construída com essa técnica, além de ser a mais longa ponte do mundo, também representa a maior operação já realizada com aduelas pré-moldadas (figura 3a). Sua superestrutura é protendida externamente com junta seca e atinge um total de 55 km de extensão. Sua construção possibilitou a diminuição dos congestionamentos frequentes observados em Bangkok [3].

A maior vantagem da construção segmentada, com protensão externa e junta seca, é a velocidade com a qual a superestrutura é erguida. Na Bang Na Expressway foram construídos 1800 segmentos por mês com alto controle de qualidade. Na figura 3b observa-se o modo como eram

transportadas as aduelas que possuíam 10 toneladas cada e 27 metros de largura.

O objetivo deste artigo é apresentar um modelo computacional, baseado no método dos elementos finitos, para a análise de estruturas segmentadas de concreto protendido, sob estados planos de tensão. Este modelo foi desenvolvido no trabalho de Ribeiro [4].

As juntas entre as aduelas são introduzidas no modelo através de elementos de contatos unidimensionais, conforme apresentado em Habraken e Cescotto [5]. Sob carga de serviço, a estrutura se apresenta totalmente comprimida e as juntas permanecem fechadas. Ao se aproximar o estado limite último, as juntas se abrem devido a esforços de tração (figura 4). Resultados numéricos obtidos através deste modelo computacional são comparados com valores experimentais obtidos por Aparicio, Gonzalo e Casas [6].

2 Análise de um material com comportamento elasto-viscoplástico através de modelo de elementos finitos

O comportamento dos materiais é determinado em função de um modelo elasto-viscoplástico, representado por uma

Figura 6 - Modelo de camadas superpostas

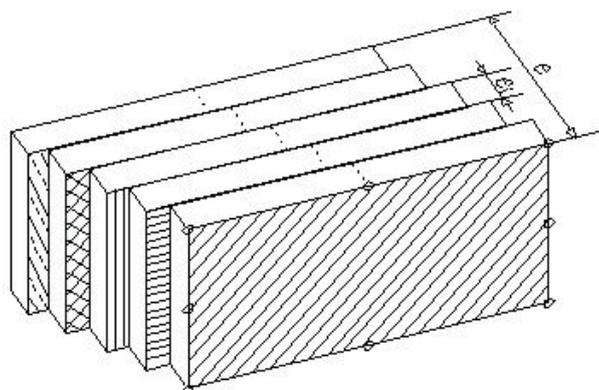
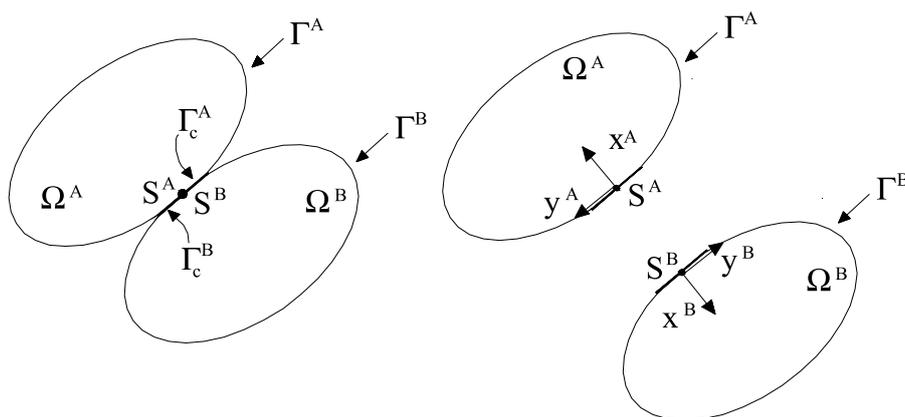


Figura 7 - Sólidos deformáveis



mola em série com um amortecedor e um elemento de atrito em paralelo, como apresentado na figura 5. Por este modelo, pode-se encontrar soluções tanto de problemas elastoplásticos, quando a estrutura atinge o estado estacionário, quanto de problemas viscoelásticos, quando se anula a tensão de plastificação. O modelo implementado utiliza um algoritmo de incremento de carga para a solução do problema elastoplástico e um algoritmo de incremento de tempo para solução do problema viscoelástico, conforme proposto por Owen e Hinton [7].

De acordo com o apresentado por Pande, Owen e Zienkiewicz [8], emprega-se um modelo de camadas superpostas para representar comportamento viscoelástico do concreto e do aço da armadura de protensão (figura 6). O material é dividido em um número conveniente de camadas, com propriedades mecânicas distintas, que sofrem a mesma deformação. As tensões totais são obtidas pela soma das contribuições de cada camada.

O modelo reológico é formado por um conjunto de elemen-

tos tipo Maxwell em paralelo, tendo-se como parâmetros as espessuras das camadas, e_i , os módulos de elasticidade, E_i , e as constantes dos amortecedores, γ_i . Adotaram-se cinco camadas para o modelo.

3 Aplicação do método dos elementos finitos

3.1 Elementos finitos para o concreto

O concreto é representado através de elementos isoparamétricos bidimensionais, de 4, 8, e 9 nós, conforme Owen e Hinton [7]. A formulação dos elementos isoparamétricos quadráticos permite gerar elementos com lados curvos e modelar mais adequadamente os contornos irregulares de peças a serem analisadas. Os elementos possuem dois graus de liberdade em cada nó, correspondentes às

Figura 8 - Elementos de contato

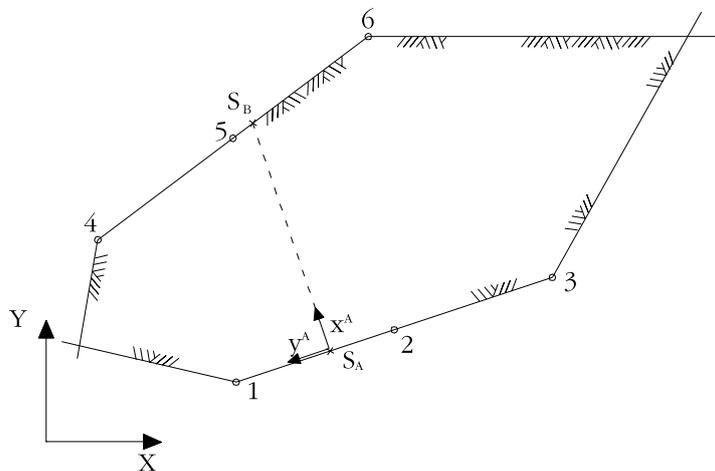
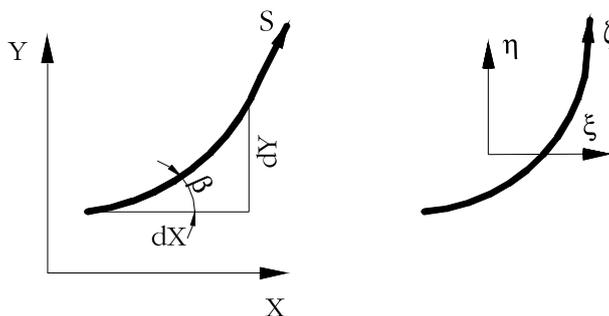


Figura 9 - Coordenadas ao longo do eixo do elemento de contato



translações na direção dos eixos x e y do sistema global de coordenadas e coordenadas normalizadas ξ e η . As juntas são representadas através de elementos de contato unidimensionais, de três nós, abordados no item 4. Os nós de cada elemento de contato coincidem com os nós do elemento de concreto que a ele foi associado.

3.2 Elementos finitos para a armadura

O modelo incorporado, por suas inúmeras vantagens, é o mais empregado para a representação de barras de armadura em análises por elementos finitos de estruturas de concreto. Neste trabalho, utilizou-se o modelo incorporado para a armadura, tanto frouxa, como de protensão, conforme proposto por Elwi e Hruday [9]. Através desta formulação, supõe-se que a armadura resista apenas a esforços axiais em sua direção longitudinal e que os deslocamentos de um ponto qualquer da barra são iguais aos do elemento de concreto no qual ela está incorporada. Pode-se posicionar arbitrariamente as barras de armadura

no interior dos elementos de concreto, sem gerar novas incógnitas para o problema.

Para considerar a protensão externa, utilizou-se o artifício de dispor elementos fictícios de concreto, paralelos aos elementos reais da estrutura. Estes elementos fictícios apresentavam rigidez muito pequena (da ordem de um centésimo dos elementos reais), sendo seus nós comuns com a malha real unicamente nas regiões de ancoragem. Os cabos de protensão externos, também representados através da formulação incorporada, foram incluídos nestes elementos fictícios.

4 Elementos de contato

4.1 Formulação

As juntas entre as aduelas foram introduzidas no modelo através de elementos de contato, segundo a formulação

proposta por Habraken e Cescotto [5]. Esta formulação é sucintamente apresentada a seguir.

Sejam dois corpos A e B de volume Ω^A e Ω^B e de perímetro Γ^A e Γ^B , como mostra a figura 7. Os dois corpos estão em contato através das superfícies Γ_C^A e Γ_C^B . As coordenadas no sistema local são definidas pelo eixo x normal à superfície de contato no ponto S (S^A ou S^B) e com o sentido para o interior do corpo, e pelo vetor y tangencial à mesma. A superfície de contato é discretizada por elementos isoparamétricos quadráticos com três nós (figura 8).

Sejam os nós 1, 2 e 3 pertencentes ao elemento de contato no sólido A e os nós 4, 5 e 6 pertencente ao elemento de contato no sólido B. Os elementos de contato são descritos através das coordenadas globais desses nós (X, Y) .

$$(X_j, Y_j) \quad j=1,2,3,4,5,6, \quad (1)$$

onde j é a numeração dos nós.

As coordenadas no sistema de referência local (x^A, y^A) são dadas por:

$$\begin{aligned} x^A &= X \cos \beta + Y \sin \beta, \\ y^A &= -X \sin \beta + Y \cos \beta, \end{aligned} \quad (2)$$

onde β é o ângulo formado pelo eixo X do sistema global e pela reta tangente ao elemento de contato no ponto considerado (figura 9).

Os valores de $\cos \beta$ e $\sin \beta$ podem ser determinados pelas expressões:

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{dX}{ds} = \frac{dX}{d\zeta} \frac{d\zeta}{ds} \\ \sin \beta &= \frac{dY}{ds} = \frac{dY}{d\zeta} \frac{d\zeta}{ds} \end{aligned} \quad (3)$$

Sendo s a coordenada que descreve o elemento de contato e ζ a coordenada normalizada correspondente ($-1 \leq \zeta \leq +1$) com:

$$\frac{ds}{d\zeta} = \sqrt{\left(\frac{dX}{d\zeta}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\zeta}\right)^2}, \quad (4)$$

e

$$\begin{Bmatrix} dX \\ d\zeta \\ dY \\ d\zeta \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} dH_i & 0 \\ d\zeta & \\ 0 & dH_i \\ d\zeta & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

onde n é o número de nós do elemento de contato.

As funções de interpolação unidimensionais, H_j , são expressas em termos de uma coordenada normalizada, ζ , como mostra o item 4.2. Seguindo o procedimento usual para o mapeamento isoparamétrico, as coordenadas globais de um ponto, localizado no interior de um elemento de contato, são expressas em termos das funções de interpolação, H_j , onde j é a numeração dos nós do elemento de contato:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} H_i(\zeta) & 0 \\ 0 & H_i(\zeta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

Portanto as coordenadas globais do ponto S^A podem ser expressas por:

$$\begin{aligned} X^A &= \left[\left(\frac{\zeta_A^2 - \zeta_A}{2} \right) X_1 + (1 + \zeta_A^2) X_2 + \left(\frac{\zeta_A^2 + \zeta_A}{2} \right) X_3 \right], \\ Y^A &= \left[\left(\frac{\zeta_A^2 - \zeta_A}{2} \right) Y_1 + (1 + \zeta_A^2) Y_2 + \left(\frac{\zeta_A^2 + \zeta_A}{2} \right) Y_3 \right], \end{aligned} \quad (7)$$

onde ζ_A é a coordenada natural do ponto S^A conhecida.

Para encontrar o elemento de contato oposto ao elemento de contato A, o elemento de contato B, deve-se traçar uma reta que passe pelo ponto S^A e tenha a direção de x^A , que tem por equação:

$$\begin{cases} X = X^A + \lambda \cos \beta \\ Y = Y^A + \lambda \sin \beta \end{cases} \quad (8)$$

onde λ é a distância entre S^A e o ponto onde a reta interceptará o elemento de contato oposto. Neste caso, em que o ponto de intersecção é S^B , a equação da reta é dada por:

$$\begin{cases} X^B = X^A + \lambda \cos\beta \\ Y^B = X^A + \lambda \text{sen}\beta \end{cases} \quad (9)$$

onde as coordenadas globais X^B e Y^B são dadas por:

$$\begin{aligned} X^B &= \left[\left(\frac{\zeta_B^2 - \zeta_B}{2} \right) X_4 + (1 + \zeta_B^2) X_5 + \left(\frac{\zeta_B^2 + \zeta_B}{2} \right) X_6 \right], \\ Y^B &= \left[\left(\frac{\zeta_B^2 - \zeta_B}{2} \right) Y_4 + (1 + \zeta_B^2) Y_5 + \left(\frac{\zeta_B^2 + \zeta_B}{2} \right) Y_6 \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

onde ζ_B é a coordenada natural do ponto S^B . Substituindo a equação (10) na equação (9) tem-se:

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{\zeta_B^2 - \zeta_B}{2} \right) X_4 + (1 + \zeta_B^2) X_5 + \left(\frac{\zeta_B^2 + \zeta_B}{2} \right) X_6 \right] = X^A + \lambda \cos\beta \\ \left[\left(\frac{\zeta_B^2 - \zeta_B}{2} \right) Y_4 + (1 + \zeta_B^2) Y_5 + \left(\frac{\zeta_B^2 + \zeta_B}{2} \right) Y_6 \right] = Y^A + \lambda \text{sen}\beta \end{cases} \quad (11)$$

Através da solução do sistema de duas equações não lineares expressas em (11), chega-se ao valor das duas incógnitas do problema, ζ_B , que é a localização do ponto

S^B , e λ que é a distância entre S^A e S^B (pontos de integração dos elementos de contato).

Para determinar o valor de λ nos nós do elemento, sabe-se que a forma explícita para a relação inversa da equação (12), em geral, não é facilmente encontrada. Entretanto, o mapeamento inverso pode ser feito, numericamente, através de um algoritmo de resolução de um sistema de equações não-lineares.

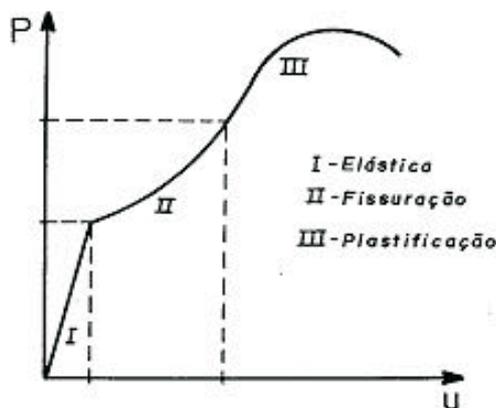
$$\lambda = \sum_{j=1}^n H_j \lambda_j, \quad j=1,2,3. \quad (12)$$

Determinada a distância λ nos pontos de definição da geometria do elemento de contato em análise, parte-se para uma segunda etapa, onde se define o elemento de contato oposto, sendo aquele em que ζ_B está compreendido entre -1 e 1 . A terceira etapa consiste em verificar se os corpos estão juntos ($\lambda \geq 0$), acrescentando então, elementos rígidos à matriz de rigidez total da estrutura, entre os nós dos elementos de contato em análise e o seu elemento oposto. À medida que as etapas de cargas são feitas e os deslocamentos são conhecidos, atualizam-se as coordenadas globais dos elementos de contato (X, Y) , e calculam-se, novamente, o elemento oposto e a distância λ entre os corpos, ou seja, a nova configuração. Quando $\lambda < 0$, ou seja, os corpos se distanciam, retira-se os elementos rígidos entre os nós dos elementos de contato, o que mantinha esses nós coincidentes, e os mesmos passarão a ter deslocamentos distintos, comportando-se como corpos distintos.

4.2 Funções de forma para os elementos de contato

As funções de interpolação para o elemento de contato

Figura 10 - Diagrama carga-deslocamento típico de um elemento de concreto



são polinômios de Lagrange, definidos de acordo com Zienkiewicz [10], a partir da expressão:

$$H^m(\zeta) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{(\zeta - \zeta_i)}{(\zeta_k - \zeta_i)} \quad (13)$$

que possui valor unitário para $\zeta = \zeta_k$, e anula-se para $\zeta = \zeta_i$, sendo $i \neq k$.

Para o elemento de três nós, resultam as seguintes funções de forma:

$$\begin{aligned} H_1(\zeta) &= \frac{\zeta^2 - \zeta}{2}, \\ H_2(\zeta) &= 1 - \zeta^2, \\ H_3(\zeta) &= \frac{\zeta^2 + \zeta}{2}. \end{aligned} \quad (14)$$

5 Modelos Constitutivos dos Materiais

5.1 Introdução

Na análise de estruturas de concreto armado ou protendido deve-se considerar que o comportamento dos materiais é não-linear. O concreto estrutural apresenta três fases típicas quando submetido a uma carregamento: uma fase elástica-linear, com o concreto ainda não-fissurado; uma fase de formação de fissuras e uma fase plástica (figura 10).

A fissuração do concreto, a plastificação do concreto e do aço, a diferença entre as resistências à tração e compressão do concreto, a não-linearidade da relação tensão-deformação e os fenômenos relacionados ao tempo como, fluência e retração do concreto e relaxação do aço protendido, entre outros fatores, como o engrenamento dos agregados e o efeito de pino das barras de aço, são as causas desta não-linearidade.

Através do método dos elementos finitos, pode-se realizar uma análise mais racional destes fenômenos, estudando cada ponto de integração isoladamente, seja para o concreto, seja para o aço.

5.2 Modelos Constitutivos para o concreto comprimido

Para o concreto comprimido foi empregado um modelo elastoplástico com endurecimento composto por um critério de ruptura, um critério de plastificação e uma regra de endurecimento.

Admite-se, para o concreto não-fissurado, um comportamento isotrópico. Sua superfície de ruptura, f , pode ser expressa por:

$$f(I_1, J_2, J_3) = 0, \quad (15)$$

onde I_1 é o primeiro invariante do tensor de tensões, e J_2 e J_3 são o segundo e o terceiro invariantes do tensor desviador de tensões.

Neste trabalho, utilizou-se o critério de ruptura, proposto por Ottosen [11], o qual foi adotado pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 [12] e é dado por:

$$\alpha \frac{J_2}{f_{cm}^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + \beta \frac{I_1}{f_{cm}} - 1 = 0, \quad (16)$$

onde f_{cm} é a resistência média à compressão do concreto e:

$$\begin{cases} \lambda = c_1 \cos[1/3 \arccos(-c_2 \sin 3\theta)], \text{ para } \sin 3\theta \leq 0 \\ \lambda = c_1 \cos[\pi/3 - 1/3 \arccos(c_2 \sin 3\theta)], \text{ para } \sin 3\theta > 0 \end{cases} \quad (17)$$

Os quatro parâmetros do modelo, α , β , c_1 e c_2 , são determinados conforme o Código Modelo CEB-FIP 1990 [12] a partir da relação, k , entre a resistência média à compressão uniaxial, f_{cm} , e a resistência média à tração uniaxial, f_{tm} , do concreto, dada por:

$$k = \frac{f_{tm}}{f_{cm}}, \quad (18)$$

onde:

$$f_{tm} = C(f_{cm})^{2/3} \quad (19)$$

e C pode variar entre 0,095 e 0,185, e o resultado, f_{tm} , sendo dado em kN/cm^2 .

O critério de ruptura de Ottosen, se forem adotados $\beta = c_2 = 0$, ou, então, $\alpha = c_2 = 0$, reduz-se aos critérios de Von Mises ou Drucker-Prager, respectivamente.

Admite-se, neste trabalho, que o concreto comprimido tenha endurecimento isotrópico. Considerando nula

Figura 11 – Superfícies de ruptura e de carregamento

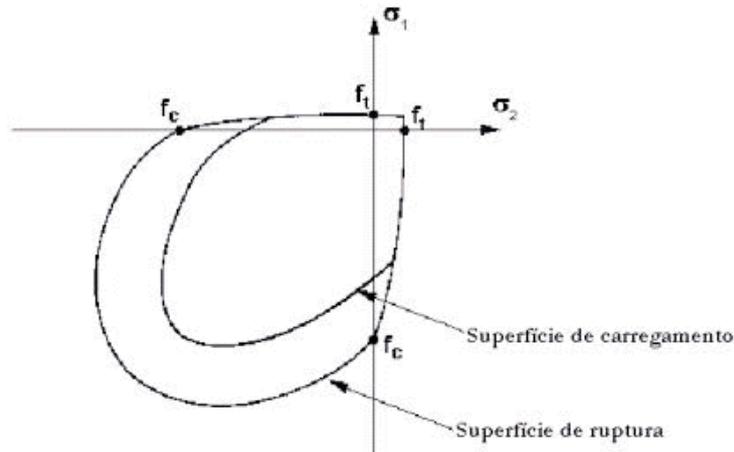
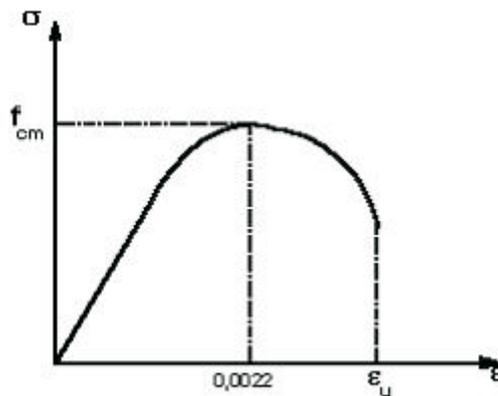


Figura 12 – Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido



a tensão de plastificação inicial, o domínio plástico, onde o material possui um comportamento elastoplástico com endurecimento, ocorre para valores de σ_{ef} dentro do intervalo $0 \leq \sigma_{ef} \leq f_{cm}$, conforme ilustrado na figura 11.

A regra de endurecimento define a maneira pela qual as superfícies de plastificação se movimentam (superfícies de carregamento), durante a deformação plástica.

É determinada pela relação tensão-deformação plástica efetiva, onde, aplicando-se tais conceitos, é possível extrapolar os resultados de um simples ensaio uniaxial para uma situação multiaxial.

Neste trabalho, usou-se a curva tensão-deformação, proposta pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 [12], para representar o comportamento do concreto, sob compressão uniaxial, cuja expressão é:

$$\sigma = \frac{\frac{E}{f_{cm}} \varepsilon - \left(\frac{\varepsilon}{-0,0022} \right)^2}{1 + \left(\frac{E}{f_{cm}} 0,0022 - 2 \right) \frac{\varepsilon}{-0,0022}} f_{cm} \quad (20)$$

A figura 12 representa o diagrama tensão-deformação, para o concreto comprimido.

5.3 Modelos Constitutivos para o concreto tracionado

O fato do concreto possuir baixa resistência à tração, re-

Figura 13 - Curva tensão-deformação para o concreto tracionado (13)

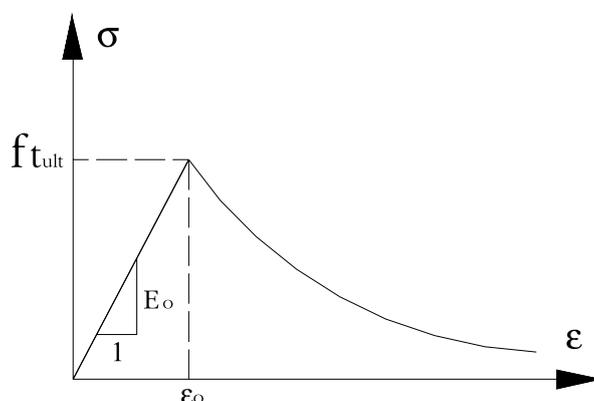
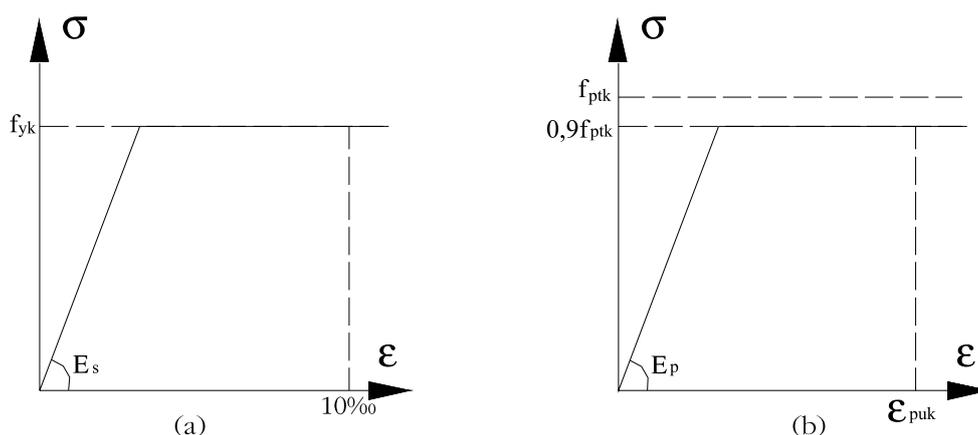


Figura 14 - Diagramas tensão-deformação: (a) armadura passiva (b) protendida



sulta na sua fissuração para baixos níveis de tensão, quando comparados com as tensões de falha à compressão. O concreto fissurado segue o modelo de fissuras distribuídas. Neste modelo, necessita-se apenas que se atualize a relação tensão-deformação após a ocorrência da fissura, sem se modificar a topologia da malha de elementos finitos durante a análise..

No presente trabalho, o concreto sob tração é modelado como sendo um material elástico com amolecimento ("strain-softening") e o critério de ruptura de Ottosen foi empregado para identificar a fratura à tração. Para um ponto, que atinge a superfície de plastificação, a situação de falha à tração é identificada conforme o critério estabelecido pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 [12], por:

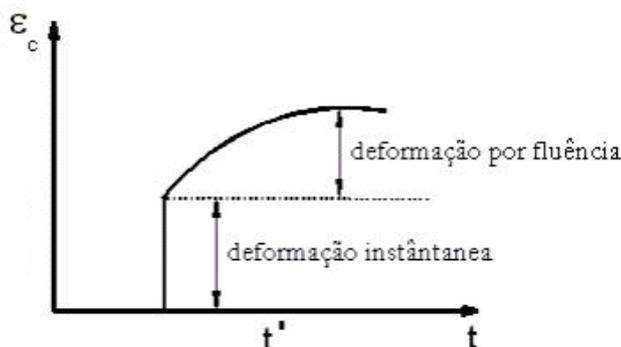
- se $\sigma_1 \geq f_{tm}/2$, ocorreu fissuração do ponto de integração,
 - se $\sigma_1 < f_{tm}/2$, ocorreu esmagamento do ponto de integração.
- A fissura é formada no plano ortogonal a σ_1 . Após isso, considera-se o concreto ortotrópico, sendo desprezado o efeito de Poisson, conforme Hinton [13], e os eixos ma-

teriais locais coincidem com as direções das tensões principais. A direção da fissura é admitida permanecer fixa, sendo este procedimento conhecido como "aproximação da fissura fixa". Para um ponto já fissurado, pode-se verificar a formação de uma segunda fissura que, por simplicidade, será considerada ortogonal à primeira fissura. Se ocorrerem duas fissuras, o concreto é suposto não colaborar mais na resistência da estrutura, tendo suas tensões anuladas no ponto em questão.

A direção da fissura é calculada resolvendo-se um problema de autovetores. Calculam-se os cossenos diretores dos ângulos formados entre o autovalor equivalente à tensão principal máxima, σ_1 , e o estado de tensão que originou a fissura.

Admite-se que o concreto entre as fissuras suporta um certo nível de tensões de tração, aderindo às barras de armadura e contribuindo ativamente para a rigidez total da estrutura. Este efeito é conhecido como enrijecimento à tração ("tension stiffening") e foi incorporado ao modelo modificando-se a curva tensão-deformação do concreto.

Figura 15 – Evolução da deformação por fluência para tensão constante aplicada



Neste trabalho, usa-se a curva exponencial, representada pela figura 13, sugerida por Hinton [13], para simular o efeito do amolecimento das deformações. Esta curva é dada por:

$$\sigma = E \epsilon_0 (\exp(-(\epsilon - \epsilon_0)/\alpha)) \quad (21)$$

onde:

- E é o módulo de elasticidade longitudinal;
- ϵ_0 é a deformação de fissuração;
- α é o parâmetro de amolecimento;
- ϵ é a deformação de tração nominal da zona fissurada.

Como uma regra geral, as primeiras fissuras que aparecem no concreto sob tração são perpendiculares à direção da mais alta tensão principal de tração do concreto, σ_1 . As direções principais se modificam, por mudanças no carregamento ou por não-linearidades da estrutura, produzindo deslocamentos relativos das faces rugosas da fissura. Isto causa o surgimento de tensões de corte no plano da fissura. O valor destas tensões de corte depende das condições locais na fissura. O principal mecanismo de transferência de esforços transversais é o engrenamento dos agregados e as principais variáveis envolvidas são o tipo e a granulometria dos mesmos. Além disso, o efeito de pino da armadura que cruza a fissura (dowell effect) tem também importância na transferência de esforços. Neste caso, as principais variáveis envolvidas são o diâmetro das barras, a taxa de armadura e a inclinação das barras em relação ao plano da fissura. Ambos mecanismos são controlados pela abertura da fissura, que, quando aumenta, faz com que se reduza a capacidade de transferência de corte ("shear transfer").

Os mecanismos acima mencionados não podem ser incluídos diretamente no modelo de fissuras distribuídas. Nos modelos de fissura fixa, tais mecanismos podem ser aproximados, conforme sugere Cervenka [14], reduzindo-se o

valor do módulo de elasticidade transversal do concreto, G, através de um fator β que varia entre 0 e 1. Desta forma, o novo valor para o módulo de elasticidade transversal, G_c , é dado por:

$$G_c = \beta G. \quad (22)$$

Em diversas análises, um valor constante foi atribuído a β , mas o mais realista seria relacioná-lo com a deformação normal à tração do concreto, ϵ_c . Cervenka [14] apresentou a seguinte fórmula para β , também utilizada por Hinton [13], a qual foi adotada neste trabalho:

$$\beta = 1 - (\epsilon_c / 0,005)^{k_1}, \quad (23)$$

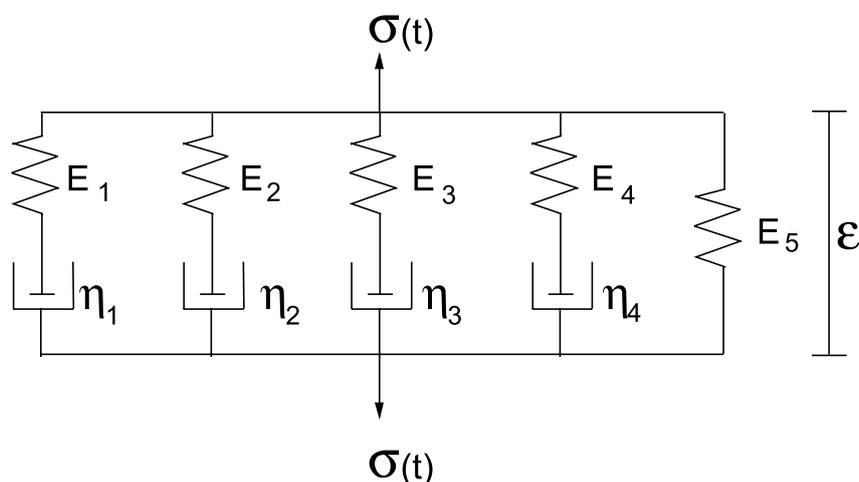
sendo k_1 tomado igual a 0,075.

5.4 Modelos Constitutivos para a Armadura

Nas estruturas de concreto estrutural, as barras de aço resistem, fundamentalmente, a esforços axiais. Deste modo, faz-se necessário apenas um modelo uniaxial para descrever o seu comportamento.

No modelo computacional deste trabalho, implementou-se um diagrama tensão-deformação bi-linear do aço, considerando-o como um material elasto-plástico perfeito. Seu módulo de elasticidade longitudinal, E_s , é um parâmetro do problema. Para as barras de armadura passiva, frouxas, o material segue um comportamento elástico-linear até atingir o valor da tensão de escoamento do aço, f_y . Já para as barras

Figura 16 - Modelo de cadeias de Maxwell em $\dot{\epsilon}$



de armadura ativa, protendidas, o material tem um comportamento também elástico-linear até atingir 90% do valor da sua tensão de ruptura, f_{ptk} , conforme o Código Modelo CEB-FIP 1990 [12]. A figura 14 ilustra os dois diagramas tensão-deformação, adotados para ambos os tipos de aço.

5.5 Modelos Viscoelásticos para o Concreto e o Aço

O concreto submetido a cargas de longa duração, sofre uma deformação instantânea, seguida por uma deformação devida a fluência, que se desenvolve ao longo do tempo. Desta forma, mesmo sob tensões constantes, as deformações no concreto aumentam no decorrer do tempo, conforme ilustrado na figura 15.

No estudo de estruturas de concreto protendido, a consideração das deformações por fluência e retração é importante, pois apresentam uma série de efeitos indesejáveis, como aumento de flechas de vigas e perdas de protensão. Seus valores são da mesma ordem de grandeza das deformações imediatas, para níveis usuais de tensão.

O modelo reológico, adotado para representar o comportamento dependente do tempo do concreto, foi uma cadeia de elementos Maxwell. Esta cadeia é constituída por uma associação em paralelo de elementos formados por uma mola em série com um amortecedor viscoso, conforme ilustra a figura 16.

Este modelo pode ser obtido a partir do modelo elasto-viscoplástico básico, admitindo-se que os elementos de atrito possuem tensão de plastificação nula.

Segundo o Código Modelo CEB-FIP 1990 [12], para tensões de serviço menores que $0,4 f_{cm}$ (resistência à compressão média do concreto), as deformações por fluência são proporcionais à tensão. Assim, neste estudo, adotou-se este comportamento linear.

Para determinar os valores dos parâmetros desse modelo

reológico, $E_{\mu}(t)$ e $\eta_{\mu}(t)$, para cada tempo t , o programa computacional utiliza o procedimento desenvolvido por Bazant e Wu [15]. A formulação matemática do modelo reológico adotado e a determinação dos parâmetros da função de fluência e retração, conforme o Código Modelo CEB-FIP 1990 [12], estão apresentados no trabalho de Machado [16].

Para a armadura frouxa, considera-se, nesta etapa, que o aço tem um comportamento elástico. Já a armadura de protensão sofre um processo de perda de tensão por efeito de relaxação. Para representar este comportamento, utilizou-se o mesmo modelo reológico adotado para o efeito de fluência no concreto, mostrado na figura 16. Adotaram-se, neste trabalho, os procedimentos de calibragem do modelo para considerar a relaxação das armaduras de protensão apresentados em Machado [16].

6 Protensão

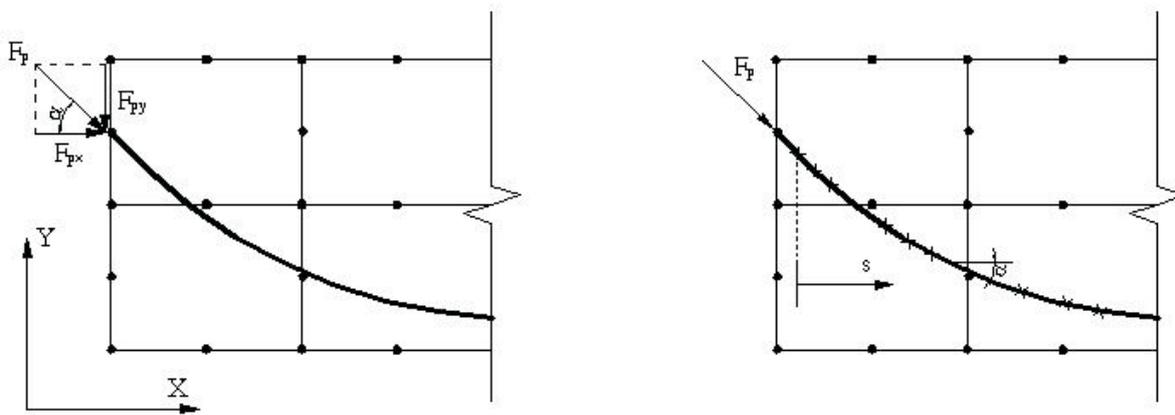
Existem, basicamente, três sistemas de protensão, a saber: protensão com aderência inicial, protensão com aderência posterior e protensão sem aderência. Os cabos de aço não aderentes têm suas extremidades ancoradas no concreto, porém não se acham incorporados à estrutura, não havendo aderência entre os cabos e o concreto. Já os cabos de aço aderentes (inicial ou posterior) têm as extremidades ancoradas no concreto e o próprio cabo ligado à estrutura, com aderência.

Neste trabalho implementaram-se três modelos matemáticos distintos para simular os três sistemas de protensão existentes.

6.1 Sistema de protensão com aderência inicial

A protensão com aderência inicial é muito empregada na fabricação de pré-moldados de concreto protendido. Nas

Figura 17 – (a) representação das forças nodais equivalentes, devidas à carga de protensão e (b) definição dos parâmetros s e $\Delta\alpha$.



pistas de protensão, a armadura ativa é posicionada, ancorada em blocos nas cabeceiras e tracionada. Em seguida, a armadura passiva é colocada, o concreto é lançado e adensado, e a peça passa pela fase de cura. Após a cura, as formas são retiradas, os equipamentos que mantinham os cabos tracionados são liberados, e os fios são cortados, transferindo a força de protensão para o concreto pela aderência, que nessa ocasião deve estar suficientemente desenvolvida. Neste sistema, ocorrem perdas imediatas e, também, perdas, ao longo do tempo, de tensão na armadura protendida. As perdas imediatas de tensão, a qual sofre uma queda, antes da aplicação da protensão, ocorridas no aço protendido, são devidas ao escorregamento dos fios na ancoragem e, também devidas à retração inicial do concreto e à relaxação inicial da armadura.

Tanto o concreto, através dos efeitos de fluência e retração, quanto o aço protendido, através da relaxação, sofrem deformações ao longo do tempo. Por este motivo, além das perdas imediatas, a tensão inicial, aplicada na protensão, sofre perdas progressivas, as quais são consideradas, automaticamente, pelo modelo computacional implementado.

Neste sistema de protensão, considerando-se aderência perfeita entre o concreto e o aço, admite-se que ocorre compatibilidade de deformação entre os pontos ao longo da barra e os pontos no concreto, localizados na mesma posição.

6.2 Sistema de protensão com aderência posterior

Neste caso, a protensão é aplicada sobre uma peça de concreto já endurecido e a aderência se dá posteriormente, através da injeção de uma calda de cimento (graute) no interior das bainhas, com o auxílio de bombas injetoras. Geralmente os cabos são pós-tracionados por meio de macacos hidráulicos especiais que se apóiam nas próprias peças de concreto já endurecido. Quando a força de pro-

tensão atinge o valor especificado, os cabos são ancorados por meio de dispositivos especiais. Esta força de protensão aplicada é transformada em forças nodais equivalentes para o elemento de concreto correspondente, conforme a figura 17(a). A força axial de compressão $F_{p'}$, devida à barra protendida é dada por:

$$F_p = \sigma_{p0} A_p \tag{24}$$

onde σ_{p0} é a tensão inicial de protensão, $t=0$, no primeiro ponto de integração, com $s = 0$ e A_p é a área da seção transversal da armadura protendida.

Tal força, $F_{p'}$, decomposta nas direções cartesianas globais, x e y , fica:

$$\begin{aligned} F_{px} &= F_p \cos \alpha \\ F_{py} &= -F_p \sin \alpha \end{aligned} \tag{25}$$

As forças nodais equivalentes, F_{pxi} e F_{pyi} , são obtidas por:

$$\begin{Bmatrix} (F_{px})_i \\ (F_{py})_i \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{px} \\ F_{py} \end{Bmatrix} \tag{26}$$

onde N_i é a função de forma para o nó i do elemento de concreto.

Figura 18 – Características geométricas e carregamento da viga

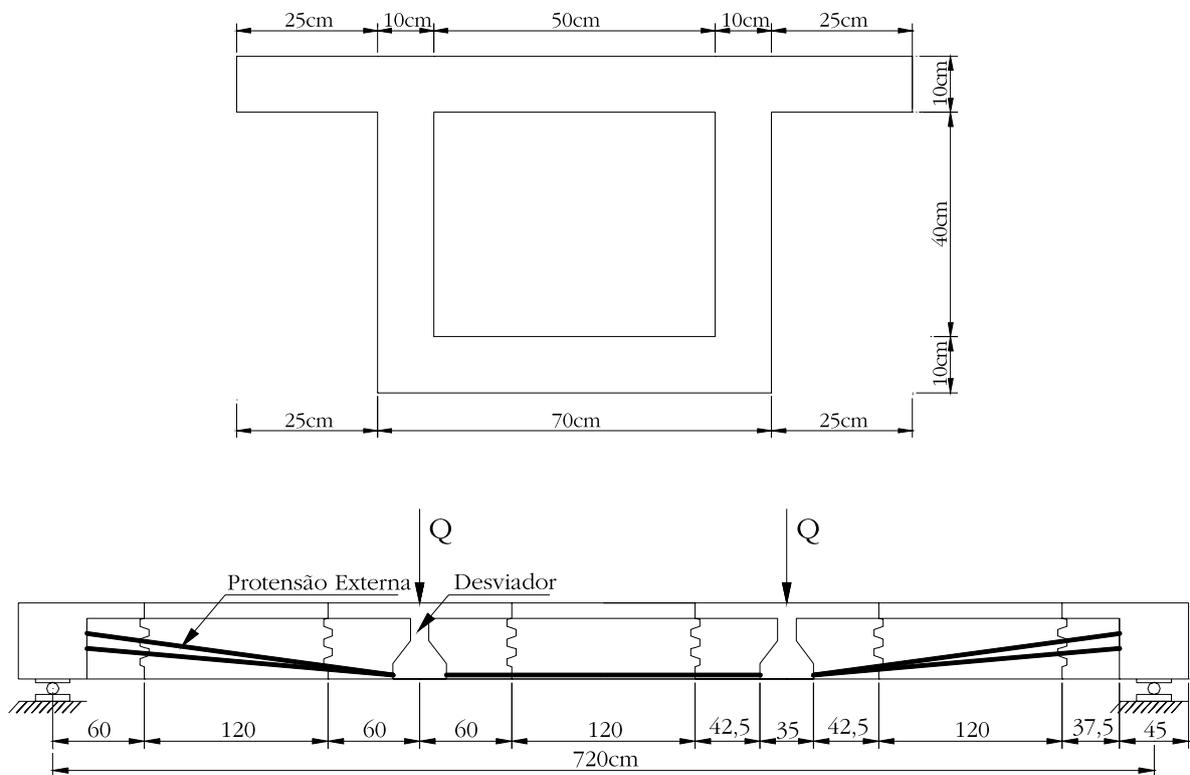
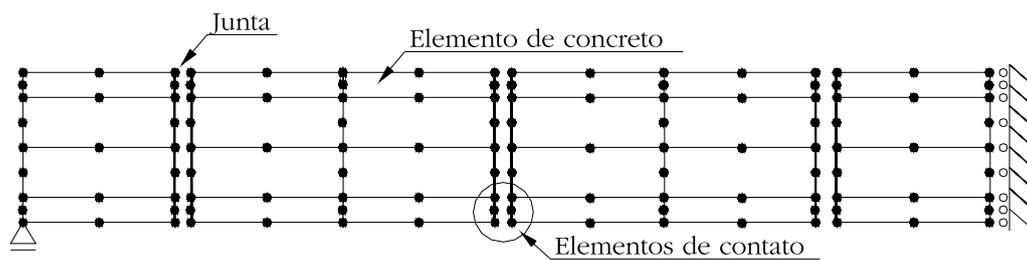


Figura 19 – Discretização dos elementos de concreto



Neste tipo de protensão ocorrem perdas imediatas devidas a diversos fatores:

- deformação imediata do concreto pelo estiramento do primeiro cabo e dos cabos restantes;
- atrito ao longo da armadura protendida;
- escorregamento dos fios na ancoragem;
- acomodação da ancoragem;
- retração e fluência iniciais do concreto;
- relaxação do aço protendido.

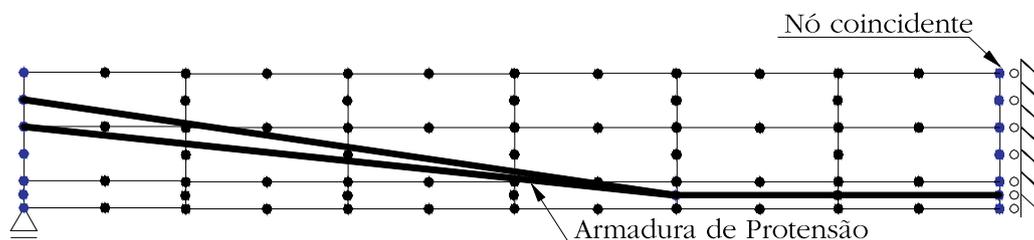
A perda de tensão, por atrito no aço protendido, é calculada, segundo Vasconcelos [23], por:

$$\sigma_{pi} = \sigma_{pi} \exp[-\mu(\Delta\alpha + 0,0001s)], \quad (27)$$

onde:

- σ_{p0} é a tensão inicial de protensão, $t = 0$, num ponto qualquer ao longo do cabo;
- σ_{pi} é a tensão de protensão, aplicada na extremidade do cabo, $s = 0$;

Figura 20 – Disposição da armadura de protensão



- $\Delta\alpha$ é a deflexão geométrica total, ou ângulo de desvio;
- s é a distância entre um ponto qualquer ao longo do cabo e a sua extremidade;
- μ é o coeficiente de atrito, dado por:

$$\mu = \begin{cases} 0,50 & \rightarrow \text{contato direto entre o concreto e a armadura} \\ 0,30 & \rightarrow \text{contato direto entre armadura de barras ou fios com} \\ & \text{ou saliências e bainha metálica} \\ 0,25 & \rightarrow \text{contato entre armadura de fios paralelos ou cordoalhas e bainha metálica} \end{cases}$$

A variação de tensão ao longo do cabo é verificada nos pontos de integração do aço. O ponto de integração do cabo situado mais próximo do ponto de aplicação da carga de protensão tem o comprimento $s = 0$. O parâmetro $\Delta\alpha$ da barra mede a variação da inclinação dos pontos de integração ao longo da barra em relação à inclinação do ponto de comprimento $s = 0$. Para barras retas, $\Delta\alpha = 0$. A definição dos parâmetros, $\Delta\alpha$ e s está ilustrada na figura 17b.

O termo ancoragem é aplicado aos dispositivos e, ou, artifícios utilizados para fixar os cabos de protensão tensionados, de forma a manter a carga aplicada pelo macaco hidráulico, impedindo que o cabo volte ao estado original, ou seja, frouxo, sem tensões. Segundo Vasconcelos [17], não é possível executar uma ancoragem perfeita. Todas, mesmo aquelas baseadas na ação de parafusos, possuem folgas. Com a carga elevada que o cabo aplica à ancoragem, esta se deforma e, durante o processo, há um pequeno retrocesso do cabo. Esse retrocesso depende de cada tipo de ancoragem e seu valor é fixado no catálogo de cada fabricante. Além disso, pode haver algum deslizamento do cabo, na própria ancoragem, antes de se efetivar seu agarramento por atrito ou por engrenamento no corpo de ancoragem. Esses deslizamentos são fixados por meio de medidas experimentais. Supõe-se que, neste trabalho, as perdas desta natureza já tenham sido consideradas nas forças de protensão aplicadas.

Da mesma forma que no sistema de protensão com aderência inicial, ocorrem, também, perdas progressivas, pelos mesmos motivos apresentados anteriormente e que são consideradas automaticamente pelo modelo computacional desenvolvido.

Os incrementos de tensão, de deformação total, de de-

formação elástica e de deformação viscoplástica, além do equilíbrio com as forças residuais aplicadas, são calculados acrescentando-se a carga externa de protensão, além da tensão inicial na armadura protendida.

6.3 Sistema de protensão sem aderência

Na protensão sem aderência, a armadura permanece livre para se movimentar ao longo de seu perfil em todas as seções com exceção das de ancoragem e nos desviadores. O comportamento dos elementos com protensão não aderente submetidos à flexão é complexo, pois a hipótese da compatibilidade de deformações entre o aço e concreto não é aplicável e tensão na armadura depende da deformação do membro como um todo e não de uma seção apenas.

Para incluir a armadura de protensão não aderente no modelo, utilizou-se o artifício de dispô-la em elementos fictícios, paralelos aos elementos reais da estrutura, tendo em comum apenas os nós de extremidade da peça estrutural e os nós localizados nos desviadores. Não existe, portanto, compatibilidade de deformações entre a armadura não aderente e o concreto. Aos elementos fictícios atribui-se um módulo de elasticidade longitudinal baixo, evitando a singularidade da matriz de rigidez total da estrutura.

A inexistência de aderência refere-se somente à armadura ativa, já que a armadura passiva sempre deve estar aderente ao concreto, estando localizada nos elementos reais.

Figueiras e Póvoas [18] e Moon e Burns [19] definiram que a principal característica dos elementos com protensão não aderente submetidos à flexão é que a variação de comprimento na armadura não aderente é equivalente à variação total de comprimento do concreto, ao longo do perfil de protensão. Existe, portanto, compatibilidade de deslocamentos em relação ao conjunto. Esta compatibilidade de deslocamentos e não de deformações, em cada seção transversal faz com que, segundo Mattock et al. [20], ocorra uma distribuição praticamente uniforme de tensões ao longo do comprimento da armadura não aderente, função da deformação média do concreto ao longo do perfil de protensão.

7 Análise de viga isostática de concreto com protensão externa

Neste item, comparam-se os resultados obtidos através do modelo computacional com valores determinados em ensaio experimental, realizados por Aparicio, Gonzalo e Casas [6], para uma viga biapoiada de 7,2 m de vão efetivo e de seção caixão. A viga ensaiada apresentava sete segmentos de concreto com junta seca e seu detalhamento pode ser visto na figura 18. A armadura protendida, de aço CP-190 RB, era constituída de quatro cordoalhas, com fios de diâmetro 1,52 cm, cuja posição pode ser vista na figura 18. A tensão inicial de protensão no aço foi de $\sigma_{p0} = 876$ MPa. O seu módulo de elasticidade era de 195.000 MPa e seu limite de resistência à tração (f_{ptk}) é de 1.900 MPa. A resistência média à compressão do concreto era de 45 MPa.

Na análise, através do método dos elementos finitos, foi empregada uma malha de vinte e quatro elementos, discretizando-se apenas metade da viga, dadas as condições de simetria de geometria, propriedades e carregamento, conforme figura 19. Para incluir a armadura de protensão não aderente no modelo, utilizou-se o artifício de dispô-la em elementos fictícios, paralelos aos elementos reais da estrutura, tendo em comum apenas os nós indicados na figura 20.

8 Representação gráfica dos resultados obtidos pelo modelo computacional

Neste item, são apresentados, graficamente, os resultados obtidos pelo modelo computacional. Na figura 21 são apresentadas as deformadas das vigas para diferentes níveis de carregamento. Nesta figura, utilizou-se um fator de amplificação de vinte vezes.

Na figura 22, mostram-se os estados de tensões no concreto, em kN/cm², para diversos níveis de carga aplicada. A figura 23a apresenta as curvas carga (Q) x deslocamento máximo e a figura 23b apresenta as curvas carga (Q) x tensões na armadura na seção central da viga analisada segundo o modelo computacional e os resultados experimentais.

9 Conclusões

O objetivo deste trabalho foi apresentar um modelo, baseado no método dos elementos finitos, para o estudo do comportamento de vigas segmentadas de concreto com protensão externa. Através do modelo apresentado, foi analisada uma viga, cujos resultados experimentais estavam disponíveis na literatura. Na situação de serviço, a viga permanece totalmente comprimida e apresenta um comportamento monolítico. Esta situação é ilustrada pelos resultados apresentados nas figuras 21a e 22a. No entanto, ao aproximar-se o estado limite último, as tensões de compressão diminuem e surgem tensões de tração, provocando a abertura das juntas (figuras 21b a 21g). Na situação analisada, primeiramente abriu-se a junta onde

a armadura de protensão estava inclinada em relação ao eixo longitudinal da viga. Posteriormente, observou-se, também, a abertura da junta mais próxima ao centro da viga. No gráfico carga x tensões na armadura, pode-se observar que, devido a abertura das juntas, ocorre um aumento significativo das tensões na armadura. Com a abertura das juntas a armadura passa a resistir a totalidade dos esforços naquelas seções. A abertura máxima de junta, para carga $Q = 140$ kN, foi 6mm.

Comparando os resultados obtidos através do modelo com os valores experimentais, verifica-se a possibilidade de simular computacionalmente o funcionamento real de estruturas segmentadas de concreto. A concordância dos resultados numéricos e experimentais, apresentados na figura 23, é muito boa. Conclui-se, desta forma, que o método dos elementos finitos pode ser uma ferramenta valiosa para o estudo de elementos estruturais segmentados com protensão externa.

10 Agradecimentos

À CAPES - Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior e ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelo suporte financeiro concedido durante a elaboração deste trabalho.

11 Referências bibliográficas

- [01] ROMBACH, G. Precast segmental box girder bridges with external prestressing-design and construction. INSA Rennes Technical University, Hamburg-Harburg, Germany. feb. 2002; 15p.
- [02] HINDI, A.; MACGREGOR, R.; KREGER, M. E. & BREEN, J. E. Enhancing strength and ductility of post-tensioned segmental box girder bridges. ACI Structural Journal, v. 92, n. 1, jan-feb. 1995; p. 33-44.
- [03] BROCKMANN, C.; ROGENHOFER, H. Bang Na Expressway, Bangkok, Thailand - World's Longest Bridge and Largest Precasting Operation. PCI Journal, jan-feb. 2000; p. 26-38.
- [04] RIBEIRO, A. S. Análise de estruturas compostas por aduelas pré-moldadas de concreto com protensão externa, sob estado plano de tensão, através do Método dos Elementos Finitos, Porto Alegre, 2004, Dissertação de mestrado - PPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 110p.
- [05] HABRAKEN, A. M.; CESCOTTO, S. Contact between deformable solids: The fully coupled approach. Mathl. Comput. Modelling, vol 28, n. 4-8, 1998; p. 153-169.
- [06] APARICIO, C. A.; GONZALO, R.; CASAS, R. J. Testing of externally prestressed concrete beams. Engineering Structures, vol 24, n. 4-8, 1952; p. 73-84.

- [07] OWEN, D. R. J.; HINTON, E. Finite element in plasticity: theory and practice. Swansea, Pineridge Press, 1980, 594 p.
- [08] PANDE, G. N.; OWEN, D. R. J. & ZIENKIEWICZ, O. C. Overlay models in time-dependent non-linear material analysis. Computers and Structures, v. 7, n. 3, 1977; p. 435-443.
- [09] ELWI, A. E.; HRUDEY, T. M. Finite element model for curved embedded reinforcement. Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, vol.115, n.4, 1989, p. 740-745.
- [10] ZIENKIEWICZ, O. C. The finite element method. London: McGraw-Hill, vol 1, 4 ed., 1986, 787p.
- [11] OTTOSEN, N. S. A failure criterion of concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, v. 103, n. 4, ago. 1977; p. 527-535.
- [12] COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. CEB-FIP Model Code 1990. Lausanne, 1993. (Bulletin d'Information, 213/214).
- [13] HINTON, E. Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells. Swansea: Pineridge Press, 1988; 550p.
- [14] CERVENKA, V. Constitutive model for cracked reinforced concrete. Journal of the American Concrete Institute, v. 82, n. 6, , 1985; p. 877-882.
- [15] BAZANT, Z.P.; Wu, S.T. Rate-type creep law of aging concrete based on Maxwell chain. Matériaux et Constructions, vol.7, n.34, 1974; p. 45-60.
- [16] MACHADO, M. S. Aplicação do método dos elementos finitos para a análise elasto-viscoplástica de peças de concreto armado e protendido, submetidas a estados planos de tensão, Porto Alegre, 2002, Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 150p.
- [17] VASCONCELOS, A. C. Manual prático para a correta utilização dos aços no concreto protendido em obediência às normas atualizadas, Rio de Janeiro: Livros técnicos e científicos, editora Ltda, 1980, 64p.
- [18] FIGUEIRAS, J. A. & PÓVOAS, R. H. Modelling of Prestress in Non-Linear Analysis of Concrete Structures. Computers & Structures. London, Elsevier Science, v. 53, n. 1, jan. 1994.
- [19] MOON, J. & BURNS, N. H. Flexural Behavior of Member with Unbonded Tendons I: Theory. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, v. 104, n. 7, jul. 1977.
- [20] MATTOCK, A. H.; YAMAZAKI J. & KATTULA, T. Comparative study of prestressed concrete beams, with and without bond. Journal of the American Concrete Institute, v. 68, n. 2, , feb. 1971; p.116-125.

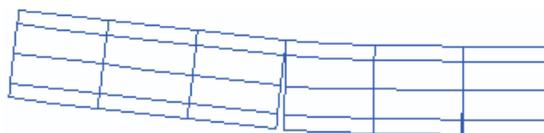
Figura 21 – Deformada da viga segundo modelo computacional



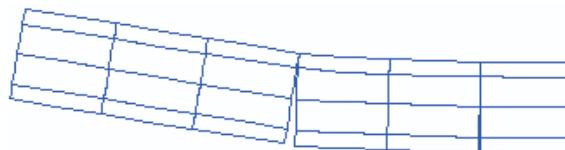
(a) Deslocamento máximo= - 0,155cm $Q=56kN$



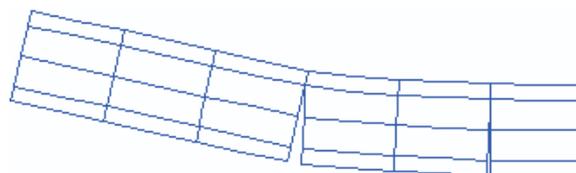
(b) Deslocamento máximo= - 0,912cm $Q=70kN$



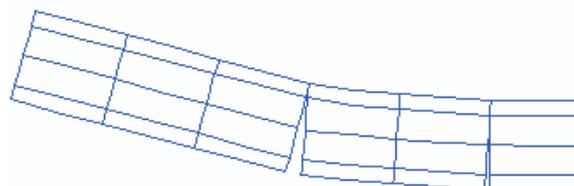
(c) Deslocamento máximo= - 1,369cm $Q=84kN$



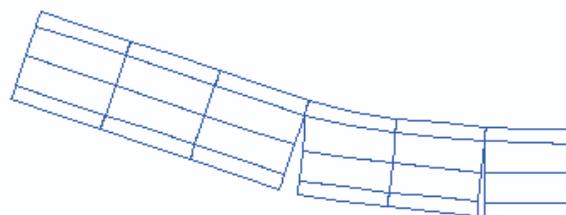
(d) Deslocamento máximo= - 1,934 cm $Q=98kN$



(e) Deslocamento máximo= - 2,892 cm $Q=112kN$

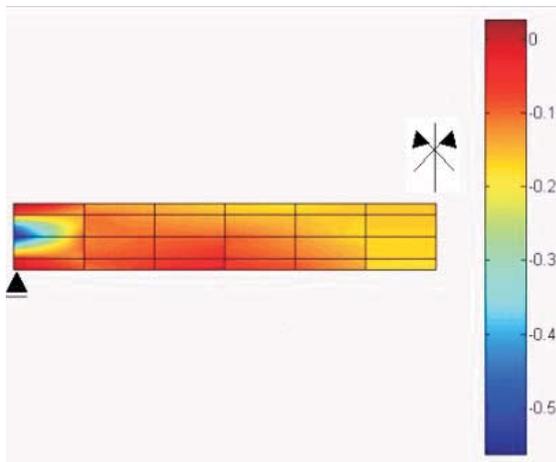


(f) Deslocamento máximo= - 3,608cm $Q=126kN$

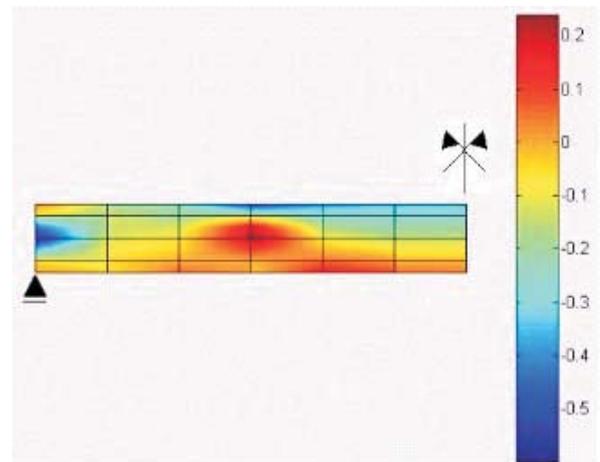


(g) Deslocamento máximo= - 4,185cm $Q=140kN$

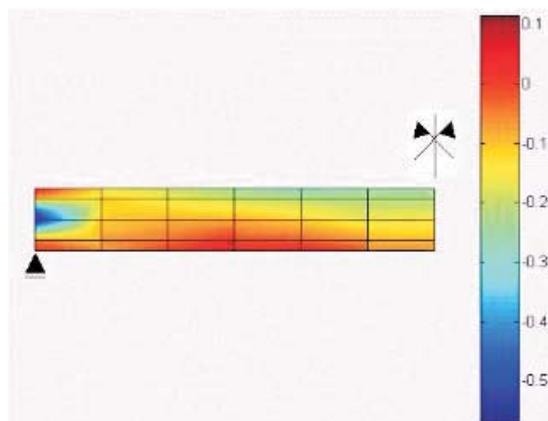
Figura 22 - Distribuição de tensões no concreto em kN/cm^2



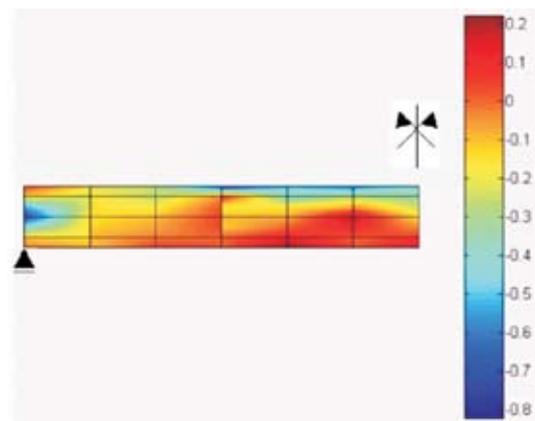
(a) $Q=14\text{kN}$



(c) $Q=42\text{kN}$



(b) $Q=28\text{kN}$



(d) $Q=56\text{kN}$

Figura 22 - Distribuição de tensões no concreto em kN/cm^2

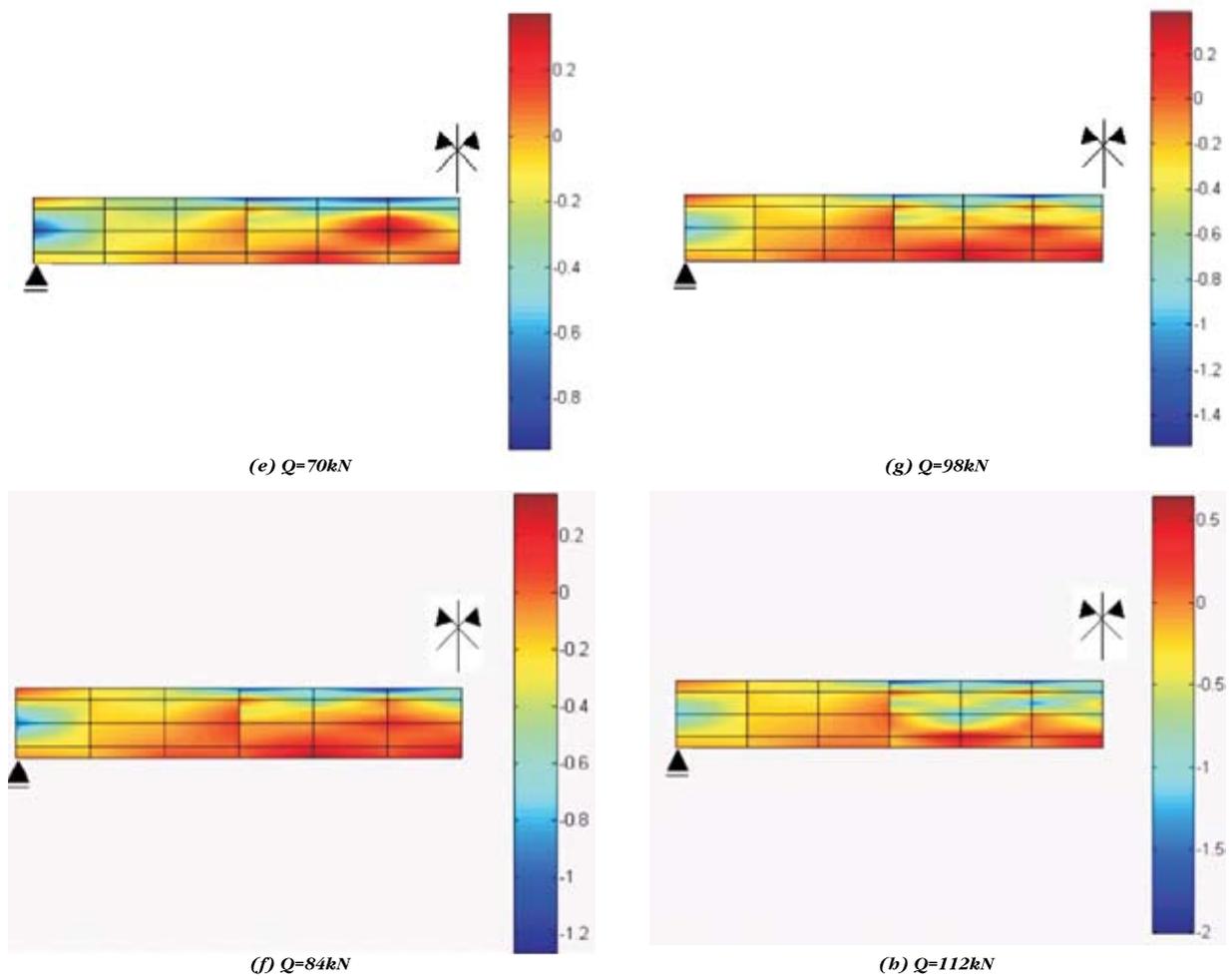
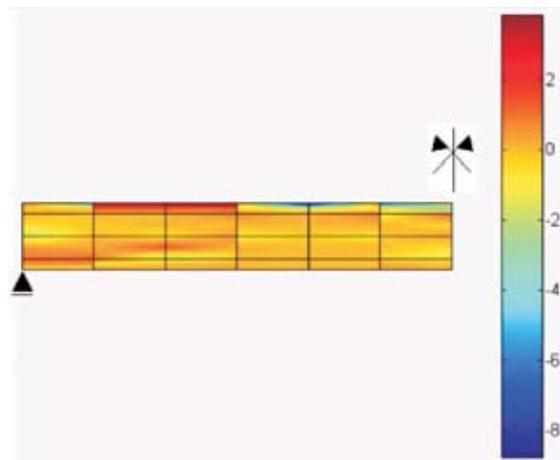
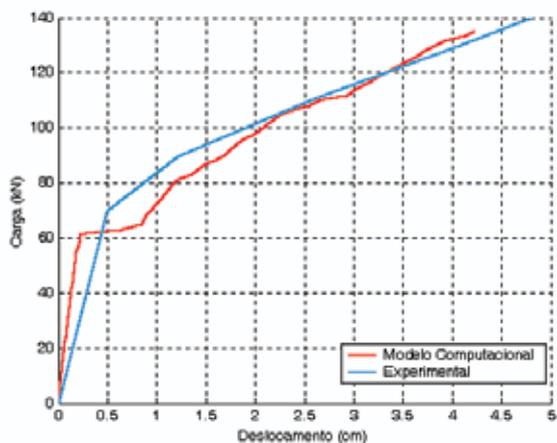


Figura 22 - Distribuição de tensões no concreto em kN/cm^2

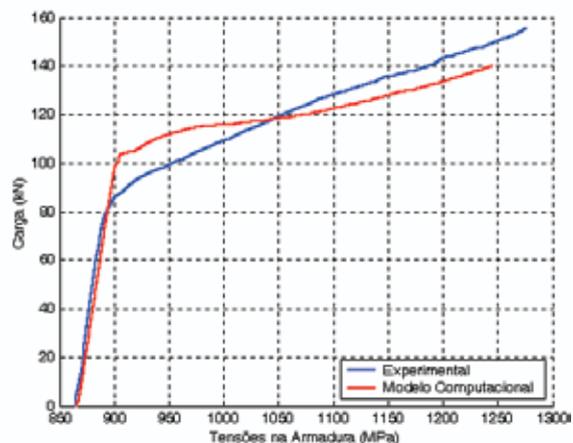


(i) $Q=140\text{kN}$

Figura 23 - Comparação entre os (a) deslocamentos e (b) tensões na armadura obtidos no modelo computacional e experimentalmente



(a)



(b)